УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1+512.816.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ КОМПАКТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ЛИ С КОММУТАТИВНОЙ СВЯЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

О.Г. Стырт styrt@bmstu.ru; oleg_styrt@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследован вопрос о том, является ли фактор-пространство компактной линейной группы топологическим многообразием, а также гомологическим многообразием. Рассмотрен случай бесконечной группы с коммутативной связной компонентой. Ранее был представлен метод сведения произвольного представления к представлению с 2-устойчивым множеством весов. Получены важные необходимые условия в случае 2-устойчивого множества весов

Ключевые слова

Группа Ли, линейное представление группы, топологический фактор действия, топологическое многообразие, гомологическое многообразие

Поступила в редакцию 03.04.2017

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 16-01-00818-а)

Введение. Пусть имеется точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V. Интересен вопрос о том, является ли фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также гомологическим многообразием. Далее для краткости назовем топологическое многообразие просто «многообразием».

Пространство V обладает G-инвариантным скалярным умножением и поэтому может (и будет) рассматриваться как евклидово пространство, на котором группа G действует ортогональными операторами. Кроме того, поскольку представление $G:V$ точное, можно полагать, что G — подгруппа Ли группы Ли $\mathbf{O}(V)$, а представление $G:V$ — тавтологическое.

Исследования по данной тематике проводились для конечных групп в работах [1, 2]. В настоящей работе рассмотрим группы с коммутативной связной компонентой.

Формулировки упомянутых во введении утверждений (в том числе результатов настоящей работы) приведены далее.

Определение 1. *Линейный оператор в пространстве над некоторым полем называется отражением* (*соответственно псевдоотражением*)*, если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность 1* (*соответственно 2*).

Доказано, что если группа $G\subset\mathbf{O}(V)$ конечна и порождена псевдоотражениями, то $V/G\cong V$ [1]. Обратное неверно. Необходимое и достаточное условие для соотношения $V/G\cong V$ получено относительно недавно в работе [2], оно описывается теоремой 1 и использует понятие *группы Пуанкаре*.

Определение 2. *Рассмотрим компактную группу Ли* $S := \{v \in \mathbb{H} : \|v\| = 1\} \subset \subset \mathbb{H}$ *(с операцией умножения кватернионов), накрывающий гомоморфизм* $S \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$ *и прообраз* $\Gamma \subset S$ *группы вращений додекаэдра при указанном гомоморфизме. Группой Пуанкаре называется линейная группа, полученная ограничением действия* $S : \mathbb{H}$ *левыми сдвигами на подгруппу* $\Gamma \subset S$.

Примем $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$. Предположим, что $G^0 \cong \mathbb{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

На пространстве $\mathfrak{g}$ определено $\operatorname{Ad}(G)$-инвариантное скалярное умножение; далее с помощью последнего будем отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Для произвольного конечного множества P векторов в конечномерном пространстве над некоторым полем, рассматриваемого с учетом кратностей своих элементов, число ненулевых векторов множества P (с учетом кратностей) обозначим через $\|P\|$.

Любое неприводимое представление группы G^0 одномерно либо двумерно. Напомним понятие веса ее неприводимого представления. Произвольное двумерное неприводимое представление группы G^0 обладает G^0-инвариантной комплексной структурой, и его можно рассматривать как одномерное комплексное представление группы G^0, сопоставив ему естественным образом вес — гомоморфизм групп Ли $\lambda : G^0 \to \mathbb{T}$ и его также обозначаемый дифференциал $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Одномерному представлению группы G^0 сопоставим вес $\lambda := 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, определенными с точностью до умножения на (-1).

Пусть $P \subset \mathfrak{g}$ — множество весов $\lambda \in \mathfrak{g}$, соответствующее разложению представления $G^0 : V$ в прямую сумму неприводимых (с учетом кратностей). Множество $P \subset \mathfrak{g}$ не зависит от выбора указанного разложения (с точностью до умножения весов на (-1)). Поскольку представление $G : V$ точное, имеем $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$.

Напомним определения *q-устойчивых* $(q \in \mathbb{N})$ и *неразложимых* множеств векторов конечномерных пространств над полями [3, §1], необходимые и в настоящей работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди указанных линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовем *собственным*. Будем говорить, что множество векторов *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причем для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение 3. *Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учетом кратностей своих элементов, назовем q-устой-*

чивым ($q \in \mathbb{N}$)*, если его линейная оболочка сохраняется при удалении из него любых векторов числом не более* q (*с учетом кратностей*).

Согласно предложению 2.2, приведенному в работе [3, § 2], если V/G — многообразие, то множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 1-устойчивым. Кроме того, в работе [3, §8] описан метод сопоставления каждой компактной линейной группе с коммутативной связной компонентой, 1-устойчивым множеством весов и фактором M компактной линейной группы с коммутативной связной компонентой, 2-устойчивым множеством весов и фактором, гомеоморфным M. В связи с изложенным выше рассмотрим случай 2-устойчивого множества весов.

Для линейного представления группы Ли H (соответственно алгебры Ли $\mathfrak{h}$) обозначим стабилизатор (соответственно стационарную подалгебру) вектора v через H_v (соответственно через $\mathfrak{h}_v$).

Приведем ранее полученный результат для представлений конечных групп (см. [2, предложение 3.13, теорема А]).

Теорема 1. *Пусть* $H \subset \mathbf{O}(V)$ *— конечная группа. Тогда*

1) если V/H *— гомологическое многообразие, то представление* $H:V$ *есть прямое произведение представлений* $H_i : V_i$ $(i = 0, \ldots, k)$, *причем линейная группа* $H_i|_{V_i}$ *является группой Пуанкаре при* $i > 0$ *и порождена псевдоотражениями при* $i = 0$ (*в частности,* $\dim V_i = 4$ *для всякого* $i = 1, \ldots, k$);

2) если представления $H_i : V_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ *из п. 1 существуют и* $V/H \ncong V$, *то* $H \subset \mathbf{O}(V)$ *— группа Пуанкаре.*

Следствие 1. *Пусть* $H \subset \mathbf{O}(V)$ *— конечная группа,* L *— множество всех ее псевдоотражений. Если* V/H *— гомологическое многообразие, то* $\langle L \rangle \cdot [H, H] = H$.

Далее для рассматриваемого представления $G:V$ докажем теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Если* V/G *— гомологическое многообразие, а* $P \subset \mathfrak{g}$ *— 2-устойчивое множество, то* $\|Q\| = \dim \langle Q \rangle + 2$ *для любой неразложимой компоненты* Q *множества* P.

Теорема 3. *Если* V/G *— гомологическое многообразие, а* $P \subset \mathfrak{g}$ *— 2-устойчивое множество, то группа* G *порождена объединением подгрупп* G^0 *и* G_v $(v \in V$, $|G_v| < \infty)$.

Обозначения и вспомогательные факты. Приведем вспомогательные обозначения и утверждения, в том числе заимствованные из процитированных работ (все новые утверждения — с доказательствами).

Лемма 1 (см. [2, теорема 2.3, лемма 2.6]. *Пусть* X *и* Y *— топологические пространства, а* n *— натуральное число. Тогда*

1) если X *— односвязная гомологическая n-сфера, то* $X \cong S^n$;

2) конус над пространством X *является гомологическим* (n + 1)*-многообразием тогда и только тогда, когда* X *— гомологическая n-сфера*;

3) пространство $X \times Y$ *является гомологическим многообразием тогда и только тогда, когда* X *и* Y *— гомологические многообразия.*

Утверждение 1. *Пусть* g *— антилинейный оператор в* n*-мерном комплексном пространстве* V. *Тогда* $\dim_{\mathbb{R}} V^g \le n$, *что равносильно,* $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(E-g) \ge n$.

◄ Вытекает из очевидных соотношений $V^{-g} = iV^g \subset V$ и $V^g \cap V^{-g} = 0$. ►

Перечислим основные свойства q-устойчивых $(q \in \mathbb{N})$ конечных множеств векторов конечномерных пространств над полями, которые (множества) рассматриваются с учетом кратностей своих элементов [3, § 1].

1. Добавление и удаление нулевых векторов, а также умножение векторов на ненулевые элементы поля не влияют на q-устойчивость множества.

2. Образ q-устойчивого множества при линейном отображении пространств является q-устойчивым множеством. В частности, если некоторое множество линейных функций на пространстве q-устойчиво, то множество их ограничений на произвольное подпространство также q-устойчиво.

3. Для любого разложения произвольного q-устойчивого множества на компоненты (не обязательно неразложимые) каждая компонента является q-устойчивой.

4. Всякое q-устойчивое множество с m-мерной линейной оболочкой $(m \in \mathbb{N})$ содержит не менее $m+q$ ненулевых векторов.

5. Всякое q-устойчивое множество с m-мерной линейной оболочкой $(m \in \mathbb{N})$, содержащее ровно $m+q$ ненулевых векторов, неразложимо, а любые его ненулевые векторы числом не более m линейно независимы.

Для конечномерного представления конечной группы над произвольным полем следующие условия эквивалентны:

1) подпространство инвариантов тривиально;

2) сумма векторов в любой орбите равна нулю.

Представление, удовлетворяющее условиям 1 и 2, для краткости назовем *представлением без инвариантов,* или *представлением, не имеющим инвариантов*.

Следующее утверждение является очевидным.

Утверждение 2. *Никакая группа нечетного порядка не обладает одномерным вещественным представлением без инвариантов.*

Следствие 2. *Всякое неприводимое вещественное представление коммутативной группы нечетного порядка, не имеющее инвариантов, двумерно.*

Следствие 3. *Если некоторая коммутативная группа имеет нечетный порядок, то размерность любого ее вещественного представления без инвариантов четна.*

Лемма 2. *Рассмотрим произвольное представление конечной группы* Γ *в пространстве* W *над полем* $\mathbb{F}$, *не имеющее инвариантов. Далее, пусть* $W_1, \ldots, W_p \subset W$ $(p \in \mathbb{N})$ *— линейно независимые подпространства, переставляемые группой* Γ, *а* Γ' *— подгруппа* $\{\gamma \in \Gamma : \gamma W_1 = W_1\} \subset \Gamma$. *Тогда*

1) представление $\Gamma' : W_1$ *не имеет инвариантов;*

2) если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *а* Γ *— группа нечетного порядка, то* $\dim W_1 \ne 1$.

◄ Для всякого вектора $w \in W_1$ имеем $\Gamma' w \subset W_1$ и $(\Gamma w) \setminus (\Gamma' w) \subset$ $\subset W_2 \oplus \ldots \oplus W_p$, причем сумма векторов в орбите $\Gamma w \subset W$ равна нулю, вследствие чего сумма векторов подмножества $\Gamma' w \subset W_1$ равна нулю. Таким образом, $\Gamma' : W_1$ — представление без инвариантов. Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а Γ — группа нечетного порядка, то $\Gamma' \subset \Gamma$ — группа нечетного порядка, и, в силу утверждения 2, $\dim W_1 \neq 1$. ►

Следствие 4. *Рассмотрим произвольное вещественное представление группы Γ нечетного порядка в пространстве W, не имеющее инвариантов. Всякая орбита действия группы Γ на множестве прямых пространства W состоит из нечетного числа линейно зависимых прямых.*

Допустим, что имеются представление $H \to \mathbf{O}(V)$ компактной группы Ли H с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$ в евклидовом пространстве V и его дифференциал — представление $\mathfrak{h} : V$. Обозначим через π отображение факторизации $V \to V / H$. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Ясно, что $\mathfrak{h}_v = \operatorname{Lie} H_v$. Кроме того, имеют место H_v-инвариантные ортогональные разложения $V = (\mathfrak{h} v) \oplus N_v$ и $N_v = N_v^{H_v} \oplus M_v$. Введем обозначения $\omega(h) := \operatorname{rk}(E - h) -$ $- \operatorname{rk}(E - \operatorname{Ad}(h)) \in \mathbb{Z}$ ($h \in H$) и $\Omega := \{h \in H : \omega(h) \in \{0, 2\}\} \subset H$.

Предложение 1. *Если V / H — многообразие, то найдется связная H-инвариантная окрестность нуля $U \subset V$, для которой фактор U / H гомеоморфен открытому шару B размерностью* $\dim(V / H)$.

Доказательство ввиду его очевидности опускается.

Лемма 3. *Если в факторе V / H некоторая окрестность точки $\pi(0)$ является (гомологическим) многообразием, то V / H — (гомологическое) многообразие.*

◄ В пространстве V найдутся H-инвариантная окрестность нуля U, такая что U / H — (гомологическое) многообразие, и открытый шар $B \subset U$ с центром в нуле. Имеем $HB = B$, причем B / H — (гомологическое) многообразие. Наконец, существует H-эквивариантный гомеоморфизм $V \to B$, что влечет требуемое. ►

Теорема 4. *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Фактор V / H является (гомологическим) многообразием локально в точке $\pi(v)$ тогда и только тогда, когда N_v / H_v — (гомологическое) многообразие.*

◄ В силу теоремы о слайсе [4, гл. II, § 4, 5], фактор V / H локально в точке $\pi(v)$ гомеоморфен фактору N_v / H_v локально в нуле. Осталось применить лемму 3. ►

Следствие 5. *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Если V / H — гомологическое многообразие, то M_v / H_v — гомологическое многообразие.*

◄ Имеем $N_v / H_v \cong N_v^{H_v} \times \left(M_v / H_v\right)$. Далее, в силу теоремы 4 N_v / H_v — гомологическое многообразие. Осталось применить лемму 1. ►

Утверждение 3. *В любом H^0-инвариантном подпространстве $V' \subset V$ существует вектор v, для которого $M_v \subset (V')^{\perp}$.*

◄ См. утверждение 2.2, приведенное в работе [3, § 2]. ►

Пусть $v \in V$ — некоторый вектор, такой что $|H_v| < \infty$. Тогда $\mathfrak{h}_v = 0$, и для любого элемента $h \in H_v$ имеем

$$\dim\big((E-h)N_v\big) = \dim\big((E-h)V\big) - \dim\big((E-h)(\mathfrak{h}v)\big) = \\ = \operatorname{rk}(E-h) - \operatorname{rk}\big(E - \operatorname{Ad}(h)\big) = \omega(h).$$

В частности, элемент $h \in H_v$ принадлежит подмножеству $\Omega \subset H$, если и только если он действует на подпространстве $N_v \subset V$ псевдоотражением либо тождественно.

Лемма 4. *Если* V/H *— гомологическое многообразие, то для всякого вектора* $v \in V$, *такого что* $|H_v| < \infty$, *имеем* $\langle H_v \cap \Omega \rangle \cdot [H_v, H_v] = H_v$.

◄ Вытекает из теоремы 4 и следствия 1. ►

Доказательства результатов. Теперь докажем теоремы 2 и 3 для рассматриваемого представления $G : V$.

Стабилизатор общего положения этого представления конечен, вследствие чего $\dim(V/G) = \dim V - \dim G = \dim V - m$. Множество $P \subset \mathfrak{g}$ весов представления $G : V$ удовлетворяет равенству $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$. Легко заметить, что $\operatorname{Ad}(G^0) = \{E\}$ и $|\operatorname{Ad}(G)| < \infty$. Примем $\omega(g) := \operatorname{rk}(E-g) - \operatorname{rk}(E - \operatorname{Ad}(g)) \in \mathbb{Z}$ $(g \in G)$ и $\Omega := \{g \in G : \omega(g) \in \{0, 2\}\} \subset G$.

Изотипную компоненту представления $G^0 : V$, соответствующую неприводимым представлениям с произвольным весом $\lambda \in P$, обозначим через V_λ. Для всякого $\lambda \in P \setminus \{0\}$ изотипная компонента $V_\lambda \subset V$ обладает структурой комплексного пространства, на котором группа G^0 действует скалярными линейными операторами. Пространство V разложимо в прямую сумму своих попарно ортогональных подпространств V_λ $(\lambda \in P)$, переставляемых группой G.

Имеем $\operatorname{Ad}(G)P = P$ и $gV_\lambda = V_{\operatorname{Ad}(g)\lambda}$ $(\lambda \in P,\ g \in G)$. В частности, $GV_0 = V_0$. Кроме того, $V_0 = V^{G^0}$. Подпространство $V_0^\perp \subset V$ разложимо в прямую сумму попарно ортогональных изотипных компонент $V_\lambda \subset V$ $(\lambda \in P \setminus \{0\})$, переставляемых группой G, и обладает G^0-инвариантной структурой комплексного пространства размерностью $\|P\|$.

Пусть $\lambda \in P \setminus \{0\}$ — произвольный вес. Элемент $g \in G$ переводит в себя изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$, если и только если $\operatorname{Ad}(g)\lambda = \pm\lambda$, действуя на ней при $\operatorname{Ad}(g)\lambda = \lambda$ (соответственно при $\operatorname{Ad}(g)\lambda = -\lambda$) линейно (соответственно антилинейно) над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $S \subset V$ — единичная сфера евклидова пространства V, $D \subset G$ — подмножество $\{g \in G : V^g \neq 0\} = \{g \in G : S^g \neq \varnothing\} = \bigcup\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} G_v = \bigcup\limits_{v \in S} G_v$, а G_{st} — нормальная подгруппа Ли $\langle G^0 \cup D \rangle \subset G$. Группа Ли G/G_{st} конечна, а действие $(G/G_{\mathrm{st}}) : (S/G_{\mathrm{st}})$ свободное.

Предложение 2. *Если* $g \in G$ *и* $\mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)} \neq 0$, *то* $g \in G_{\mathrm{st}}$.

◄ Рассмотрим подгруппу Ли $H := \mathcal{Z}_G(g) \subset G$.

По условию $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H = \mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)} \neq 0$, отсюда $\dim H > 0$. Поскольку представление $H^0 : V$ точное, некоторая его изотипная компонента $V' \subset V$ обладает комплексной структурой, такой что $(H^0)|_{V'} = \mathbb{T}E \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Далее $g \in \mathcal{Z}(H) \subset H$, $\operatorname{Ad}_H(g) = id_{\mathfrak{h}}$, вследствие чего $gV' = V'$ и $g|_{V'} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Найдется вектор $v \in V' \setminus \{0\}$, являющийся собственным для оператора $g|_{V'} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Имеем $gv \in \mathbb{T}v = H^0 v$, $g \in H^0 G_v \subset G_{\mathrm{st}}$. ►

Следствие 6. *Справедливо включение* $\operatorname{Ker} \operatorname{Ad} \subset G_{\mathrm{st}}$.

Предложение 3. *Если* $m = 1$ *и* $V_0 = 0$, *то подгруппа* $H := \langle (\operatorname{Ker} \operatorname{Ad}) \cap D \rangle \lhd G$ *конечна.*

◄ Обозначим через n число $\|P\| \in \mathbb{N}$, а через φ — изоморфизм групп Ли $G^0 \to \mathbb{T}$.

Пространство V обладает структурой комплексного пространства с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, удовлетворяющей для некоторых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n$ условиям $G^0 \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Ad} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ и $ge_j = (\varphi(g))^{k_j} e_j \in V$, где $g \in G^0$ и $j = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что $(\operatorname{Ker} \operatorname{Ad}) \cap D \subset H \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Ad} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

Примем $k_0 := |G/G^0| \in \mathbb{N}$, $k := k_1 \ldots k_n \in \mathbb{N}$ и $k' := k_1 + \ldots + k_n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in (\operatorname{Ker} \operatorname{Ad}) \cap D$. Ясно, что $g := h^{k_0} \in G^0 \cap D$. Найдется число $j \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющее равенству $(\varphi(g))^{k_j} = 1$. Отметим, что $g^{k_j} = E$, $g^k = E$, $h^{k_0 k} = E$, $(\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0 k} = \det_{\mathbb{C}}(h^{k_0 k}) = 1$.

Следовательно, равенство $(\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0 k} = 1$ выполняется для любого $h \in (\operatorname{Ker} \operatorname{Ad}) \cap D$, таким образом, и для любого $h \in H$. В частности, если $h \in G^0 \cap H$ — произвольный элемент, то $1 = (\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0 k} = (\varphi(h))^{k' k_0 k}$. Отсюда $|G^0 \cap H| = |\varphi(G^0 \cap H)| \leq k' k_0 k < \infty$, $|H| < \infty$. ►

До конца работы будем полагать, что V/G — гомологическое многообразие, а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2-устойчивое множество.

Имеем $\|P\| \geq m + 2$, $\dim V \geq 2m + 4 > 4$, $\dim S > 3$. Поэтому сфера $S \subset V$ связна и односвязна. Согласно лемме 1, $M := S/G$ — гомологическая сфера. Кроме того, $\dim(V/G) = \dim V - m \geq (2m + 4) - m > 4$, $\dim M > 3$. Отсюда (см. лемму 1)

$$\left(\pi_1(M)\right) / \left[\pi_1(M), \pi_1(M)\right] \cong H_1(M) = 0; \tag{1}$$

$$\left(\pi_1(M) = \{e\}\right) \Rightarrow \left(\pi_2(M) = 0\right). \tag{2}$$

Лемма 5. *Группа* G/G_{st} *совпадает со своим коммутантом.*

◄ Поскольку сфера $S \subset V$ связна, факторпространство S/G_{st} связно. Далее, как уже было отмечено, $|G/G_{\mathrm{st}}| < \infty$, а действие $(G/G_{\mathrm{st}}) : (S/G_{\mathrm{st}})$ свободное. Фактор данного действия гомеоморфен M, а отображение факторизации $(S/G_{st}) \twoheadrightarrow M$ является накрытием со слоем G/G_{st}. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм $\pi_1(M) \twoheadrightarrow G/G_{\mathrm{st}}$. Ввиду (1) $\pi_1(M) = \left[\pi_1(M), \pi_1(M)\right]$, что влечет требуемое. ►

Теорема 5. *Если* $m = 1$ *и* $V_0 = 0$, *то* $\mathrm{Ad}(D) \ni -E$.

◄ Допустим, что утверждение теоремы не выполняется, т. е. что $D \subset \mathrm{Ker\,Ad}$.

В силу предложения 3 $H := \langle D \rangle \lhd G$ — конечная подгруппа Ли, а $G' := G / H$ — одномерная группа Ли. Согласно следствию 6, $\mathrm{Ker\,Ad} \subset G_{\mathrm{st}} = \langle G^0 \cup D \rangle \subset \mathrm{Ker\,Ad}$, $\mathrm{Ker\,Ad} = \langle G^0 \cup D \rangle = G^0 H$, $G' / (G')^0 \cong G / (G^0 H) = G / (\mathrm{Ker\,Ad}) \cong \mathrm{Ad}(G)$.

Из связности и односвязности сферы $S \subset V$, а также соотношений $D = \{g \in G : S^g \neq \varnothing\} \subset G$, $H = \langle D \rangle \lhd G$ и $|H| < \infty$ вытекает, что факторпространство S / H связно и односвязно, а действие $G' : (S / H)$ — свободное. Его фактор гомеоморфен M, а отображение факторизации $(S / H) \twoheadrightarrow M$ есть локально тривиальное расслоение со слоем G'. Рассмотрим участок точной гомотопической последовательности $\pi_2(M) \to \pi_1(G') \to \pi_1(S / H) \to \pi_1(M) \to G' / (G')^0 \to 0$. Поскольку $\pi_1(S / H) = \{e\}$ и $\pi_1(G') \cong \mathbb{Z}$, имеем $\pi_2(M) \neq 0$ и $\pi_1(M) \cong G' / (G')^0 \cong \mathrm{Ad}(G)$. Наконец, ввиду (1), $\pi_1(M) = [\pi_1(M), \pi_1(M)] \cong [\mathrm{Ad}(G), \mathrm{Ad}(G)] = \{E\}$, $\pi_1(M) = \{e\}$, что противоречит (2). ►

Теорема 6. *Если* $m = 1$ *и* $V_0 = 0$, *то* $\mathrm{Ad}(\Omega) \ni -E$.

◄ Допустим, что утверждение теоремы не выполняется, т. е. $\Omega \subset \mathrm{Ker\,Ad}$.

Имеем $\langle \Omega \rangle \subset \mathrm{Ker\,Ad}$ и, кроме того, $[G, G] \subset \mathrm{Ker\,Ad}$, откуда $\langle \Omega \rangle \cdot [G, G] \subset \subset \mathrm{Ker\,Ad}$.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in S$. Легко заметить, что $|G_v| < \infty$. Согласно лемме 4, $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle \cdot [G_v, G_v] \subset \langle \Omega \rangle \cdot [G, G] \subset \mathrm{Ker\,Ad}$.

Таким образом, для всякого $v \in S$ выполнено включение $G_v \subset \mathrm{Ker\,Ad}$. Следовательно, $D = \bigcup\limits_{v \in S} G_v \subset \mathrm{Ker\,Ad}$, что невозможно в силу теоремы 5. ►

Теорема 7. *Если* $m = 1$ *и* $V_0 = 0$, *то* $\mathrm{Ad}(G) = \{\pm E\}$ *и* $\|P\| = 3$.

◄ Согласно теореме 6, найдется элемент $g \in \Omega$, такой что $\mathrm{Ad}(g) = -E$. Имеем $\mathrm{Ad}(G) = \{\pm E\}$, $n := \|P\| \geq 3$, $\mathrm{rk}(E - \mathrm{Ad}(g)) = 1$ и $\omega(g) \leq 2$, откуда $rk(E - g) \leq \leq 3$. Пространство V обладает структурой n-мерного комплексного пространства, на котором элемент $g \in G$ действует антилинейно. Следовательно, $\mathrm{rk}(E - g) \geq \geq n \geq 3 \geq \mathrm{rk}(E - g)$, $n = 3$. ►

Для конечного подмножества $Q \subset \mathfrak{g}^*$, рассматриваемого с учетом кратностей своих элементов, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и вектора $\xi \in \mathfrak{g}$, примем $Q|_{\mathfrak{h}} := \{\lambda|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^* : \lambda \in Q\} \subset \mathfrak{h}^*$ и $Q_\xi := \{\lambda \in Q : \lambda(\xi) \neq 0\} \subset Q$.

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор. Имеем $\mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) = \mathfrak{g}(\mathfrak{g}_v v) = 0$, $\mathfrak{g}v \subset \subset V^{G_v^0} \subset V$ и, как следствие, $M_v^{\perp} = (\mathfrak{g}v) \oplus N_v^{G_v} \subset V^{G_v^0}$. Представление $G_v : V$ точное, а множество его весов совпадает с множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$. Таким образом, представление $G_v^0 : M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$.

Теорема 8. *Если* $m=1$, *то* $\mathrm{Ad}(G)=\{\pm E\}$ *и* $\|P\|=3$.

◄ Согласно утверждению 3, существует вектор $v\in V_0$, для которого $M_v\subset V_0^{\perp}$. Далее, в силу следствия 5 M_v/G_v — гомологическое многообразие. Имеем $G_v\supset G^0$, $G_v^0=G^0$, $\mathfrak{g}_v=\mathrm{Lie}\,G_v=\mathfrak{g}$, $\dim G_v=1$. Представление $G_v^0:M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с множеством $P\subset\mathfrak{g}$. При этом $M_v\subset V_0^{\perp}$, откуда $M_v^{G_v^0}=M_v^{G^0}=0$. Осталось применить теорему 7 к представлению $G_v:M_v$. ►

Лемма 6. *Пусть* $Q\subset P$ — *подмножество, для которого* $\bigcap\limits_{\lambda\in Q}(\mathrm{Ker}\,\lambda)=\mathbb{R}\xi\subset\mathfrak{g}$, $\xi\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$. *Тогда* $\mathrm{Ad}(G)\xi\ni-\xi$ *и* $\|P_\xi\|=3$.

◄ В каждой изотипной компоненте $V_\lambda\subset V$ ($\lambda\in Q$) выберем ненулевой вектор v_λ. Примем $v:=\sum\limits_{\lambda\in Q}v_\lambda\in V$. Имеем $\mathrm{Lie}\,G_v=\mathfrak{g}_v=\bigcap\limits_{\lambda\in Q}(\mathrm{Ker}\,\lambda)=\mathbb{R}\xi\subset\mathfrak{g}$, $\dim G_v=1$.

Представление $G_v^0:M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с 2-устойчивым множеством $P|_{\mathfrak{g}_v}\subset\mathfrak{g}_v^*$. Согласно следствию 5, M_v/G_v — гомологическое многообразие. Далее, в силу теоремы 8 $\left(\mathrm{Ad}(G_v)\right)|_{\mathfrak{g}_v}=\{\pm id_{\mathfrak{g}_v}\}\subset\mathbf{O}(\mathfrak{g}_v)$, $\mathrm{Ad}(G_v)\xi=\{\pm\xi\}\subset\mathfrak{g}_v$, $\mathrm{Ad}(G)\xi\ni-\xi$, а также $\|P|_{\mathfrak{g}_v}\|=3$, $\|P_\xi\|=\|P|_{(\mathbb{R}\xi)}\|=3$. ►

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Поскольку $\langle P\rangle=\mathfrak{g}$, множество $P\subset\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^*$ представляется в виде объединения (с учетом кратностей векторов) своих подмножеств P' и P'', таких что подмножество $P'\subset\mathfrak{g}^*$ не содержит кратных векторов и совпадает с некоторым базисом $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$ пространства $\mathfrak{g}^*$. Существует базис $\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$ пространства $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий равенствам $\lambda_i(\xi_j)=\delta_{ij}$ ($i,j=1,\ldots,m$).

Имеем $\|P'_{\xi_j}\|=1$ ($j=1,\ldots,m$) и $\|P'_{\xi_{j_1}}\Delta P'_{\xi_{j_2}}\|=2$ ($j_1,j_2=1,\ldots,m$, $j_1\neq j_2$). Далее, для всякого $j=1,\ldots,m$ пересечение ядер всех весов $\lambda_i\in P$ ($i=1,\ldots,m$, $i\neq j$) есть не что иное, как подпространство $\mathbb{R}\xi_j\subset\mathfrak{g}$, $\xi_j\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$, и, согласно лемме 6, $\|P_{\xi_j}\|=3$, $\|P''_{\xi_j}\|=\|P_{\xi_j}\|-\|P'_{\xi_j}\|=2$.

Легко заметить, что $P''\setminus\{0\}=\bigcup\limits_{j=1}^{m}P''_{\xi_j}\subset P''$.

Покажем, что среди подмножеств $P''_{\xi_j}\subset P''$ ($j=1,\ldots,m$) никакие два различных не пересекаются.

Допустим, что $P''_{\xi_{j_1}}\neq P''_{\xi_{j_2}}$ и $P''_{\xi_{j_1}}\cap P''_{\xi_{j_2}}\neq\varnothing$ для некоторых $j_1,j_2\in\{1,\ldots,m\}$.

Ясно, что $j_1\neq j_2$. Таким образом, $\|P'_{\xi_{j_1}}\Delta P'_{\xi_{j_2}}\|=2$. Кроме того, найдется вес $\lambda\in P$, такой что $c_1:=\lambda(\xi_{j_1})\neq 0$ и $c_2:=\lambda(\xi_{j_2})\neq 0$. Пересечение ядер всех весов $\lambda_i\in P$ ($i=1,\ldots,m$, $i\neq j_1,j_2$) и $\lambda\in P$ совпадает с подпространством $\mathbb{R}\xi\subset\mathfrak{g}$, $\xi:=c_2\xi_{j_1}-c_1\xi_{j_2}\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$, и в силу леммы 6 $\|P_\xi\|=3$. Из соотношения $c_1,c_2\neq 0$

вытекает, что $P_{\xi_{j1}} \Delta P_{\xi_{j2}} \subset P_{\xi}$, $\| P_{\xi_{j1}} \Delta P_{\xi_{j2}} \| \leq \| P_{\xi} \| = 3$, $\| P''_{\xi_{j1}} \Delta P''_{\xi_{j2}} \| = \| P_{\xi_{j1}} \Delta P_{\xi_{j2}} \| - \| P'_{\xi_{j1}} \Delta P'_{\xi_{j2}} \| \leq 1$. В то же время $\| P''_{\xi_{j1}} \| = \| P''_{\xi_{j2}} \| = 2$ и $P''_{\xi_{j1}} \neq P''_{\xi_{j2}}$, откуда $\| P''_{\xi_{j1}} \Delta P''_{\xi_{j2}} \| \geq 2$. Получили противоречие.

Тем самым установили, что среди подмножеств $P''_{\xi_j} \subset P''$ $(j = 1, \ldots, m)$ никакие два различных не пересекаются.

Следовательно, существуют разложения $\{1, \ldots, m\} = \coprod_{l=1}^{p} I_l$ и $P'' \setminus \{0\} = \coprod_{l=1}^{p} Q''_l \subset P''$ $(p \in \mathbb{N})$, где $I_l \subset \{1, \ldots, m\}$, $I_l \neq \varnothing$, $Q''_l \subset P'' \setminus \{0\}$, $\|Q''_l\| = 2$ $(l = 1, \ldots, p)$, и, кроме того, $P''_{\xi_j} = Q''_l \subset P''$ $(l = 1, \ldots, p,\ \ j \in I_l)$.

Рассмотрим произвольное число $l \in \{1, \ldots, p\}$.

Пусть $Q'_l \subset P'$ — подмножество, включающее в себя каждый вектор $\lambda_i \in \mathfrak{g}^*$, $i \in I_l$, с кратностью 1 и не содержащее других векторов пространства $\mathfrak{g}^*$, а $Q_l \subset P$ — объединение (с учетом кратностей векторов) подмножеств $Q'_l \subset P'$ и $Q''_l \subset P''$. Если $\lambda \in Q''_l \subset P''$ и $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_l$, то $\lambda \notin P''_{\xi_j}$, $\lambda(\xi_j) = 0$. Следовательно, $Q''_l \subset \langle \lambda_i \rangle_{i \in I_l} = \langle Q'_l \rangle \subset \mathfrak{g}^*$, $\langle Q_l \rangle = \langle Q'_l \rangle \subset \mathfrak{g}^*$, $\dim \langle Q_l \rangle = \dim \langle Q'_l \rangle = | Q'_l | = \| Q'_l \|$, $\| Q_l \| = \| Q'_l \| + \| Q''_l \| = \dim \langle Q_l \rangle + 2$.

Имеем $\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{l=1}^{p} \langle Q'_l \rangle = \bigoplus_{l=1}^{p} \langle Q_l \rangle$ и $P' = \coprod_{l=1}^{p} Q'_l \subset P \setminus \{0\}$, откуда $P \setminus \{0\} = \coprod_{l=1}^{p} Q_l \subset P$. Таким образом, множество $P \setminus \{0\} \subset P$ разложимо на компоненты $Q_l \subset P$ $(l = 1, \ldots, p)$. Для всякого $l = 1, \ldots, p$ компонента $Q_l \subset P$ является 2-устойчивой и в силу равенства $\| Q_l \| = \dim \langle Q_l \rangle + 2$ неразложимой.

Тем самым теорема 2 доказана.

Теорема 9. *Имеем* $G_{\mathrm{st}} = G$.

Доказательству теоремы 9 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Пусть* $\Gamma \subset \mathrm{Ad}(G)$ *— коммутативная подгруппа нечетного порядка. Тогда* $\mathfrak{g}^{\Gamma} \neq 0$.

◄ Предположим, что $\mathfrak{g}^{\Gamma} = 0$, т. е. что тавтологическое представление $\Gamma : \mathfrak{g}$ не имеет инвариантов.

Пусть $Q \subset \mathfrak{g}$ — некоторая неразложимая компонента множества $P \subset \mathfrak{g}$, Γ' — подгруппа $\{\gamma \in \Gamma : \gamma Q = Q\} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \langle Q \rangle = \langle Q \rangle\} \subset \Gamma$, а $\overline{Q}$ — множество всевозможных прямых $\mathbb{R}\lambda \subset \mathfrak{g}$, $\lambda \in Q \setminus \{0\}$ (*без учета кратностей прямых*). Ясно, что $\Gamma' \overline{Q} = \overline{Q}$.

Линейные оболочки всех неразложимых компонент множества $P \subset \mathfrak{g}$ — линейно независимые подпространства пространства $\mathfrak{g}$, переставляемые группой Γ, и, согласно лемме 2, представление $\Gamma' : \langle Q \rangle$ не имеет инвариантов. При этом $\Gamma' \subset \Gamma$ — коммутативная группа нечетного порядка. В силу следствий 3 и 4 число $m' := \dim\langle Q\rangle \in \mathbb{N}$ четно, а любая орбита действия $\Gamma' : \overline{Q}$ состоит из нечетного числа линейно зависимых прямых. В частности, $m' \geq 2$.

Неразложимая компонента $Q \subset \mathfrak{g}$ множества $P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивой и, согласно теореме 2, удовлетворяет равенству $\|Q\| = \dim\langle Q\rangle + 2$. Таким образом, в множестве $Q \subset \mathfrak{g}$ любые ненулевые векторы числом не более m' линейно независимы. Поскольку $m' \geq 2$, все ненулевые векторы этого множества попарно не пропорциональны. Следовательно, множество $\overline{Q}$ включает в себя ровно $m'+2$ прямых, среди которых любые числом не более m' линейно независимы.

С учетом изложенного выше любая орбита действия $\Gamma' : \overline{Q}$ имеет нечетный порядок, не меньший $m'+1$. При этом $|\overline{Q}| = m'+2 \,\vdots\, 2$, следовательно, порядок любой орбиты действия $\Gamma' : \overline{Q}$ равен $m'+1$. Отсюда $m'+2 = |\overline{Q}| \,\vdots\, m'+1$, $1 \,\vdots\, m'+1 > 1$. Получили противоречие. ►

Следствие 7. *Если $A \in \mathrm{Ad}(G)$ и $A^k = E$, где k — нечетное натуральное число, то $\mathfrak{g}^A \neq 0$.*

◄ Подгруппа $\Gamma := \langle A\rangle \subset \mathrm{Ad}(G)$ является коммутативной и имеет нечетный порядок. В силу леммы 7 $\mathfrak{g}^A = \mathfrak{g}^\Gamma \neq 0$. ►

Число $|\mathrm{Ad}(G)| \in \mathbb{N}$ представимо в виде $2^{d_0} k_0$, где $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а k_0 — нечетное натуральное число.

Предложение 4. *Пусть $g \in G$ — произвольный элемент, тогда $h := g^{2^{d_0}} \in G_{\mathrm{st}}$.*

◄ Примем $A := \mathrm{Ad}(h) = (\mathrm{Ad}(g))^{2^{d_0}} \in \mathrm{Ad}(G)$. Имеем $A^{k_0} = (\mathrm{Ad}(g))^{2^{d_0} k_0} = E$ и в силу следствия 7 $\mathfrak{g}^{Ad(h)} = \mathfrak{g}^A \neq 0$. Согласно предложению 2, $h \in G_{\mathrm{st}}$. ►

Следствие 8. *Для всякого $\gamma \in G/G_{\mathrm{st}}$ имеем $\gamma^{2^{d_0}} = e$.*

Теперь можно доказать теорему 9.

Напомним, что группа Ли G/G_{st} конечна. С одной стороны, в силу следствия 8 указанная группа является конечной 2-группой и потому разрешима. С другой стороны, согласно лемме 5, группа G/G_{st} совпадает со своим коммутантом. Отсюда $G/G_{\mathrm{st}} = \{e\}$, $G_{\mathrm{st}} = G$.

Тем самым теорема 9 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Докажем, что оно не выполнено для некоторой компактной линейной группы Ли с размерностью пространства менее $\dim V$: это позволит доказать теорему индукцией по $\dim V$.

Согласно теореме 9, $\langle G^0 \cup D\rangle = G_{\mathrm{st}} = G$. Другими словами, группа G порождается своими подгруппами G^0 и G_v ($v \in V \setminus \{0\}$). В то же время в группе G объединение подгрупп G^0 и G_v ($v \in V$, $|G_v| < \infty$) порождает подгруппу $H \neq G$. Следовательно, существует вектор $v \in V \setminus \{0\}$, такой что подгруппа $G_v \subset G$ является бесконечной и не содержится в подгруппе $H \subset G$.

Представлению $G_v : M_v$ отвечает гомоморфизм групп Ли $R : G_v \to \mathbf{O}(M_v)$. Примем $V' := M_v \subset N_v \subset V$ и $G' := R(G_v) \subset \mathbf{O}(M_v) = \mathbf{O}(V')$.

Докажем, что тавтологическое представление $G' : V'$ является искомым.

Очевидно, что представление $G' : V'$ точное.

Имеем $G_v^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$, где $m' := \dim G_v \in \mathbb{N}$. Кроме того, представление $G_v^0 : M_v$ точное, и поэтому $(\operatorname{Ker} R) \cap G_v^0 = \{e\} \subset G_v^0$. Отсюда $(G')^0 = R(G_v^0) \cong G_v^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$ и $|\operatorname{Ker} R| < \infty$.

Множество весов представления $G_v : M_v$ с точностью до нулей совпадает с 2-устойчивым множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$. Поскольку $|\operatorname{Ker} R| < \infty$, множество весов представления $G' : V'$ также 2-устойчиво.

Ясно, что $M_v / G_v \cong V' / G'$. В силу следствия 5 фактор M_v / G_v является гомологическим многообразием; то же можно утверждать и о факторе V' / G'.

Отметим, что $0 \neq v \in N_v^{G_v} \subset (\mathfrak{g}v) \oplus N_v^{G_v} = M_v^{\perp} = (V')^{\perp} \subset V$. Таким образом, $\dim V' < \dim V$.

Пусть U — подмножество $\{v' \in V' : |G'_{v'}| < \infty\} \subset V'$, а H' — подгруппа группы G', порожденная подгруппами $(G')^0 \subset G'$ и $G'_{v'} \subset G'$ ($v' \in U$). Покажем, что $H' \neq G'$.

В силу соотношения $(G')^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$ стабилизатор общего положения точного представления $G' : V'$ конечен. Следовательно, $U \neq \varnothing$.

Рассмотрим произвольный вектор $v' \in U$. Имеем $|G'_{v'}| < \infty$ и $|\operatorname{Ker} R| < \infty$. Поэтому $|R^{-1}(G'_{v'})| < \infty$. Кроме того, $v' \in U \subset V' = M_v \subset N_v$. Следовательно, найдется число $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, для которого $G_{v+\varepsilon v'} \subset G_v$. Очевидно, что $G_{v+\varepsilon v'} = G_v \cap G_{v'} = R^{-1}(G'_{v'}) \subset G_v$. Таким образом, $R^{-1}(G'_{v'}) = G_{v+\varepsilon v'} \subset G_v$ и $|R^{-1}(G'_{v'})| < \infty$, откуда $\operatorname{Ker} R \subset R^{-1}(G'_{v'}) \subset G_v \cap H$, $G'_{v'} = R\left(R^{-1}(G'_{v'})\right) \subset R(G_v \cap H)$.

Тем самым стало ясно, что для любого $v' \in U$ выполнены включения $\operatorname{Ker} R \subset G_v \cap H$ и $G'_{v'} \subset R(G_v \cap H)$. Поскольку $U \neq \varnothing$, имеем $\operatorname{Ker} R \subset G_v \cap H$. Отметим, что $G^0 \subset H$, $G_v^0 \subset G_v \cap G^0 \subset G_v \cap H$, $(G')^0 = R(G_v^0) \subset R(G_v \cap H)$. Следовательно, $H' \subset R(G_v \cap H)$, $R^{-1}(H') \subset R^{-1}\left(R(G_v \cap H)\right) = (\operatorname{Ker} R)(G_v \cap H) \subset$ $\subset (G_v \cap H)(G_v \cap H) = G_v \cap H \subset H$.

Если $H' = G'$, то $G_v = R^{-1}(H') \subset H$, что неверно. Поэтому $H' \neq G'$.

Таким образом, представление $G' : V'$ является точным, удовлетворяет неравенству $\dim V' < \dim V$ и не удовлетворяет утверждению теоремы.

Тем самым теорема 3 доказана.

Заключение. В настоящей работе вопрос о том, является ли фактор-пространство компактной линейной группы многообразием, изучен для бесконечной группы с коммутативной связной компонентой. Получены важные необходимые условия в предположении 2-устойчивости множества весов (как было показано ранее, произвольный случай можно свести к данному). Результаты работы создают основы для полного исследования случая 2-устойчивого множества весов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлова М.А.* О факторпространстве по действию конечной группы, порожденной псевдоотражениями // Известия АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 104–126.

2. *Lange C.* When is the underlying space of an orbifold a topological manifold? URL: https://arxiv.org/abs/1307.4875 (дата обращения: 15.02.2017).

3. *Стырт О.Г.* О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Труды ММО. 2009. № 70. С. 235–287.

4. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980. 440 с.

Стырт Олег Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Стырт О.Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 68–81.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81

TOPOLOGICAL AND HOMOLOGICAL PROPERTIES OF THE ORBIT SPACE OF A COMPACT LINEAR LIE GROUP WITH A COMMUTATIVE CONNECTED COMPONENT

O.G. Styrt styrt@bmstu.ru; oleg_styrt@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of the work was to find whether the compact linear group space factor is a topological manifold, as well as a homological manifold. The paper studied the case of an infinite group with a commutative connected component. In previous research a method of reducing an arbitrary representation to a representation with a 2-stable set of weights was introduced. Findings of the research helped to obtain important necessary conditions in the case of a 2-stable weight set

Keywords

Lie group, linear representation of a group, topological quotient of an action, topological manifold, homological manifold

Received 03.04.2017

This work was supported by a grant from the RFBR (no. 16-01-00818-a)

REFERENCES

[1] Mikhailova M.A. On the quotient space modulo the action of a finite group generated by pseudoreflections. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1985, vol. 24, no. 1, pp. 99–119. DOI: 10.1070/IM1985v024n01ABEH001216

[2] Lange C. When is the underlying space of an orbifold a topological manifold? Available at: https://arxiv.org/abs/1307.4875 (accessed: 15.02.2017).

[3] Styrt O.G. On the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2009, pp. 171–206.
DOI: 10.1090/S0077-1554-09-00178-2

[4] Bredon G.E. Introduction to compact transformation groups. Academic Press, 1972. 459 p.

Styrt O.G. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Styrt O.G. Topological and Homological Properties of the Orbit Space of a Compact Linear Lie Group with a Commutative Connected Component. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 68–81 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81