

ВЛИЯНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ И ЧАСТОТЫ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ НА ЕЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

М.Б. Гавриков^{1,2}

А.А. Таюрский¹

tayurskiy2001@mail.ru

¹ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследовано поглощение плоских альфвеновских волн в неоднородной несжимаемой диссипативной плазме и зависимость поглощения от частоты волны. Показано, что учет тормозного излучения приводит к конечности глубины проникания альфвеновской волны в диссипативную плазму и появлению установившегося квазистационарного режима поглощения. Параметры этого режима являются решениями некоторой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой. Рассмотрены неоднородности по плотности, распределенные по гауссову закону, двух типов — вершины и впадины. Получены зависимости глубины проникания альфвеновской волны и значений максимальной температуры электронов и ионов от размера вершины и частоты падающей волны

Ключевые слова

Классическая магнитная гидродинамика, электромагнитная гидродинамика, поглощение альфвеновской волны, тормозное излучение

Поступила в редакцию 04.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10278)

Введение. Магнитогидродинамическая плазма допускает поперечные синусоидальные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, в которых термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин не возмущаются [1]. Впервые такие волны были обнаружены Х. Альфвеном (1942) и названы альфвеновскими [2].

Одним из многочисленных приложений альфвеновских волн является предложенный в работе [3] механизм нагрева солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов как результат затухания в плазме солнечной короны альфвеновских волн, генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях (фотосфера). В связи с этим в работах [4–6] изучен механизм нелинейного пространственного поглощения альфвеновских волн вследствие плазменных диссипаций — омического сопротивления плазмы, гидродинамических вязкостей и теплопроводностей электронов и ионов, релаксации температуры электронов и температуры ионов, тормозного излучения плазмы. При этом нелинейность процесса поглощения обуславливалась, прежде

всего, зависимостью коэффициентов переноса от температуры электронов, температуры ионов и других параметров плазмы, а также в значительно меньшей степени — сжимаемостью плазмы. В перечисленных работах плазма заполняла полупространство $x \geq 0$, на границу которого $x = 0$ падала альфвеновская волна, и полагалась однородной и квазинейтральной.

В настоящей работе, являющейся продолжением работ [4–6], проанализировано влияние плазменных неоднородностей в области $x \geq 0$, заполненной диссипативной плазмой, и частоты ω падающей альфвеновской волны на ее поглощение. Проведенное исследование основано на теоретических представлениях и вычислительных алгоритмах, развитых в работах [4–6]. Перечислим основные моменты, необходимые для понимания представленных ниже результатов.

Во-первых, исследование поглощения альфвеновских волн с неизбежностью должно базироваться на двухжидкостной гидродинамике плазмы с полным учетом инерции электронов. Это объясняется мелкомасштабным характером процесса поглощения, происходящего на длинах порядка скин-слоев $\ell_c = c / \omega_p$ (ω_p — плазменная частота), на которых уравнения классической, или холловской, магнитной гидродинамики (МГД) неприменимы. Поэтому исследование, проведенное в работах [4–6] и в настоящей работе, основано на уравнениях гидродинамики электронов и ионов — уравнениях Брагинского [7] — в предположении квазинейтральности плазмы, замыкающихся усеченной системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Полученная система уравнений с учетом перечисленных диссипаций редуцируется [8] к одножидкостной форме — уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД).

Во-вторых, при исследовании нелинейного пространственного поглощения альфвеновских волн диссипативную плазму можно полагать несжимаемой [4–6]. Эффекты сжимаемости влияют только в малой окрестности границы плазмы, на которую падает альфвеновская волна, и обусловлены предположением о неподвижности границы, а не физикой процесса поглощения. Это позволило ограничиться более простыми уравнениями несжимаемой ЭМГД.

В-третьих, альфвеновские волны в двухжидкостной ЭМГД-плазме отличаются от альфвеновских волн в классической МГД. В частности, в отличие от МГД-теории частота альфвеновских волн, бегущих против магнитного поля с напряженностью H , по абсолютной величине не превосходит электронную циклотронную частоту $\omega_c^- = \omega_{e,c} = eH / (m_e c)$, а для волн, бегущих вдоль магнитного поля, — ионную циклотронную частоту $\omega_c^+ = \omega_{i,c} = ZeH / (m_i c)$, где Z — кратность заряда ионов. Для низких частот $\omega \ll \omega_{i,c}$ альфвеновские волны в ЭМГД- и МГД-теориях практически совпадают. Подробнее альфвеновские волны в двухжидкостной плазме рассмотрены ниже.

В-четвертых, характер нелинейного поглощения альфвеновских волн кардинально изменяется с учетом тормозного излучения. Без тормозного излучения

альфвеновская волна проникает в однородную замагниченную диссипативную плазму с напряженностью магнитного поля H и плотностью ρ сколь угодно далеко, распространяясь по ней со скоростью $\sim 10v_A$, где $v_A = H/\sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость. Тормозное излучение «запирает» альфвеновскую волну, в результате чего она проникает в диссипативную плазму только на конечную глубину d . При этом параметры затухающей альфвеновской волны в диссипативной плазме с течением времени стабилизируются, выходя на квазистационарный режим, параметры которого можно найти, решая краевую задачу на полупрямой $x \geq 0$ для специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Определение финальных установившихся характеристик затухающей альфвеновской волны и является целью исследования процесса поглощения.

Перечисленные выше результаты получены в предположении однородности диссипативной плазмы, поглощающей альфвеновскую волну, в частности ее плотность полагалась постоянной $\rho = \text{const}$. Далее рассмотрено влияние неоднородности плотности ρ диссипативной плазмы и частоты ω падающей альфвеновской волны на ее поглощение. Поскольку диссипативная плазма предполагается покоящейся и несжимаемой, а процесс поглощения — обладающим плоской симметрией, распределение плотности $\rho(x)$ в полупространстве $x \geq 0$, занятом диссипативной плазмой, согласно уравнениям гидродинамики, теоретически может быть любым. В приближении плоской атмосферы применительно к солнечной короне [5, 6] распределение $\rho(x)$ является монотонно убывающей на полупрямой $x \geq 0$ функцией. Однако реальное распределение плотности в солнечной короне значительно сложнее. Ниже предположено, что плотность $\rho(x)$ имеет на бесконечности конечное предельное фоновое значение ρ_0 . При этом, исключая паталогические случаи, реализуются три логически возможные качественно определенные ситуации: 1) всюду $\rho(x) > \rho_0$ ($\rho(x)$ имеет вершину); 2) всюду $\rho(x) < \rho_0$ ($\rho(x)$ имеет впадину); 3) график $\rho(x)$ представляет собой чередование конечного числа вершин и впадин. В соответствии с изложенным в работе рассмотрено влияние на поглощение альфвеновской волны двух типов неоднородностей, задаваемых гауссовым распределением $\rho(x)/\rho_0 = 1 + A \exp[-(x-x_0)^2/D]$, $D > 0$, $x_0 > 0$. Для $A > 0$ функция $\rho(x)$ задает неоднородность типа вершина, а для $0 > A > -1$ — типа впадины. Отметим, что конечное произведение функций указанного вида для соответствующим образом подобранных параметров A , x_0 , D позволяет качественно правильно аппроксимировать любую пространственную неоднородность плотности третьего типа. Кроме того, предложенный подход дает возможность проанализировать влияние любой пространственной неоднородности плотности на поглощение альфвеновских волн. Результаты исследования влияния указанных выше факторов на поглощение альфвеновской волны приведены ниже.

Уравнения электромагнитной гидродинамики. Для исследования динамики двухжидкостной плазмы используем уравнения несжимаемой ЭМГД [9, 10]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} \mathbf{P}; \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тензоры плотности потока импульса Π , вязких напряжений \mathbf{P} и «холловских слагаемых» \mathbf{W} имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathbf{P} = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)}; \\ \mathbf{W} = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) \mathbf{I}_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}; \\ \Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma \mathbf{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее индексы « \pm » относятся к параметрам ионов и электронов; $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$; $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$; $p_\Sigma = p_+ + p_-$; $m_\Sigma = m_+ + m_-$; $\rho = \rho_+ + \rho_-$; $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$; \mathbf{I}_3 — единичный трехмерный тензор; σ — проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учетом несжимаемости плазмы:

$$\begin{aligned} \Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma D^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* D^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* D^c - \frac{2}{3} \mu^* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \mathbf{I}_3; \\ \Pi_*^{(c)} = 2\mu_* D^c - \frac{2}{3} \mu_* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \mathbf{I}_3, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm D_\pm \mp \frac{2}{3} \mu_\pm \lambda_\pm \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \mathbf{I}_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $D^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$, $D^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$, $D_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$ — тензоры деформаций, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$; $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$; $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$; μ_\pm — гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов полагаются равными нулю. Для плоских течений $\mathbf{j} \cdot \nabla (1/\rho) = 0$ и выражения (3) сильно упрощаются. Учитывая зависимость проводимости плазмы σ , гидродинамических вязкостей μ_\pm и других коэффициентов переноса от температуры электронов и температуры ионов T_\pm , систему (1)–(3) необходимо дополнить уравнениями для температуры [11]:

$$\rho_\pm c_p^\pm \left[\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \operatorname{div} T_\pm \mathbf{v}_\pm \right] = \operatorname{div} (\chi_\pm \nabla T_\pm) + \operatorname{tr} (\Pi_\pm D_\pm) + \frac{m_\pm}{m_\Sigma} \frac{j^2}{\sigma} \pm b (T_- - T_+) - p_T^\pm, \quad (4)$$

где $c_p^\pm = k / ((\gamma - 1) m_\pm)$ — теплоемкости при постоянном давлении; χ_\pm — теплопроводности электронов и ионов; $Q = \pm b (T_- - T_+)$ — теплота, передаваемая компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях; p_T^\pm — потери на тормозное излучение электронов и ионов, причем потери на тормозное излучение

ние ионов полагаются нулевыми. При этом следует учесть выражения гидродинамических параметров электронов и ионов через величины ρ , \mathbf{U} , \mathbf{j} :

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda_{\Sigma}} \rho. \quad (5)$$

С учетом зависимостей σ , μ_{\pm} , χ_{\pm} , b , p_T^{\pm} от остальных параметров плазмы, прежде всего температуры T_{\pm} , уравнения (1)–(5) образуют замкнутую определенную систему уравнений относительно величин ρ , p_{\pm} , T_{\pm} , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} .

Коэффициенты переноса μ_{\pm} , χ_{\pm} , σ , b получают приближенным решением кинетических уравнений [7] и полагают равными [12–17]:

$$\begin{aligned} \mu_{+} &= 3,44 \cdot 10^{-18} \left(\frac{m_{+}}{m_{-}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2}, \quad \mu_{-} = 1,857 \cdot 10^{-18} T_{-}^{5/2}, \quad \sigma = 0,906 \cdot 10^7 T_{-}^{3/2}; \\ b &= 9,044 \cdot 10^{38} \left(\frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^3 \frac{\rho^2}{T_{-}^{3/2}}, \quad \chi_{-} = 3,657 \cdot 10^{-5} T_{-}^{5/2}, \quad \chi_{+} = 6,436 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2}; \\ p_T^{+} &= 0, \quad p_T^{-} = 8,044 \cdot 10^{32} n_i n_e T_{-}^{1/2} \text{ эрг / (с} \cdot \text{см}^3), \end{aligned}$$

где T_{\pm} — температура, К.

Отметим также, что в представленных выше результатах $\mu_{-} = 0$, поскольку теоретическое значение электронной вязкости как минимум на 2–3 порядка завышено. Поглощение альфвеновской волны для реального значения электронной вязкости μ_{-} требует дополнительных исследований.

Более подробные формулы для диссипативных коэффициентов приведены в работе [5].

Альфвеновские волны в электромагнитной динамике. В бездиссипативном случае и плоской геометрии уравнения ЭМГД имеют точные решения вида [5]

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, \quad H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, \quad E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, \quad T_{\pm} = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad U_x = 0, \quad (6)$$

которые называются *плоскими альфвеновскими волнами*. В (6) $k > 0$ — произвольное и использованы комплексные обозначения $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$. При этом $H_x = \text{const}$, а $e(t)$ выражается в явном виде через $u(t)$ и $h(t)$:

$$\begin{aligned} e(t) &= \left(\frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{ik\Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) / (1+r^2), \quad r = \frac{kc}{\omega_p}, \\ \Lambda &= \sqrt{\frac{\lambda_{+}}{\lambda_{-}}} - \sqrt{\frac{\lambda_{-}}{\lambda_{+}}}, \quad v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции $u(t)$, $h(t)$ имеют вид

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{kv_A} \{ C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t} \}. \quad (8)$$

Здесь $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2}(\lambda_+\lambda_-)^{-1/2}$ — плазменная частота; C_1, C_2 — произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока $j_\perp = j_y + ij_z$ также изменяется по закону $j_\perp = j(t)e^{ikx}$, а $j_x = 0$, где $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi}h(t)$. Наконец,

$$\omega_\pm = \omega_\pm(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (9)$$

Удобно обратить формулу (9):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \frac{|\omega|}{\left(\frac{v_A^2\omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda\omega - \omega^2 \right)^{1/2}}, \quad (10)$$

где $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$ для $H_x > 0$ и $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ для $H_x < 0$.

Постановка задачи о пространственном поглощении. Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области $x \leq 0$, набегает на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, заполняющей полупространство $x \geq 0$. Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области $x \geq 0$ сопряжено с ее поглощением, которое и является предметом изучения. Согласно результатам, полученным выше, если продольное магнитное поле $H_x < 0$, то частота набегавшей альфвеновской волны ω изменяется в диапазоне $-\omega_c^- = H_x/(\lambda_-c) < \omega < 0$, а если $H_x > 0$, то — в диапазоне $-\omega_c^+ = -H_x/(\lambda_+c) < \omega < 0$. Ниже ограничимся наиболее интересным первым случаем. Плазма в области $x \geq 0$ полагается замагниченной покоящейся изотермической с заданным распределением плотности $\rho(x)$. Таким образом, в начальный момент времени в области $x \geq 0$ имеем

$$U_\perp|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad H_\perp|_{t=0} = 0, \quad T_\pm|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho(x), \quad (11)$$

где $\rho(x)$ — распределение плотности, имеющее при $x \rightarrow +\infty$ конечный предел $\rho > 0$, причем константа ρ и продольное магнитное поле $H_x = \text{const}$ такие же, как и в области $x \leq 0$, откуда набегает альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе $x = 0$ совпадают со значениями на границе $x = 0$ параметров альфвеновской волны, откуда, согласно формулам (6)–(10), имеем следующие граничные условия при $x = 0$:

$$U_\perp|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_\perp|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} \omega e^{i\omega t}; \quad (12)$$

$$E_\perp|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+\lambda_-} \omega \right), \quad j_\perp|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущенной плазмы при $t = 0$:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \quad (13)$$

Запишем систему (1)–(5) в безразмерном виде в случае плоской геометрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), используя обозначения $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$, $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$.

Установившиеся квазистационарные состояния поглощенной альфвеновской волны с частотой ω , представляющие основной интерес, ищутся как решения полученной системы вида $T_{\pm} = T_{\pm}(x)$, $U = U(x)\exp(i\omega t)$, $H = H(x)\exp(i\omega t)$, $E = E(x)\exp(i\omega t)$, $j = j(x)\exp(i\omega t)$. Легко получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений на амплитуды $T_{\pm}(x)$, $U(x)$, $E(x)$:

$$\begin{aligned} i\rho\omega U - \frac{H_x}{\omega} E'' - (\mu_{\Sigma} U')' + \frac{i\xi}{\omega} \left(\mu_{*} \left(\frac{E''}{\rho} \right)' \right) &= 0; \\ E - \left(\frac{\xi^2}{\rho} - \frac{i\xi\zeta}{\omega\sigma} - \frac{\xi\Lambda H_x}{\omega\rho} \right) E'' - iH_x U + \frac{\xi}{\rho} (\mu_{*} U)' - \frac{i\xi^2}{\omega\rho} \left(\mu_{*} \left(\frac{E''}{\rho} \right)' \right) &= 0; \\ (\chi_{\pm} T'_{\pm})' + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi\zeta}{\omega^2\sigma} |E''|^2 \pm \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{-} - T_{+}}{T_{\pm}^{3/2}} + & \\ + \frac{T_{\pm}^{3/2}}{R_{\pm}} \left[|U'|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\omega^2} \left| \left(\frac{E''}{\rho} \right)' \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\omega} \sqrt{\lambda_{\mp}} \operatorname{Re} \left(iU' \left(\frac{E''}{\rho} \right)' \right) \right] - & \\ - \frac{(1\pm 1)}{4} \frac{\xi_T}{\xi} Z^2 \rho T_{\pm}^{1/2} = 0, & \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$; $\mu_{*} = (\lambda_{-}/\lambda_{+})^{1/2} \mu_{+} - (\lambda_{-}/\lambda_{+})^{1/2} \mu_{-}$; $\mu^{*} = (\lambda_{-}/\lambda_{+}) \mu_{+} + (\lambda_{-}/\lambda_{+}) \mu_{-}$; $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2}/R_{\pm}$; $\sigma = \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}$; $\chi_{\pm} = C_{\pm}(\xi/\zeta) T_{\pm}^{5/2}$, а значения σ_0 , C_0 , R_{\pm} , C_{\pm} равны:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = 2,59, \quad C_0 = \frac{m_e}{m_i}, \quad R_{+} = 1,108 \cdot \frac{\zeta}{\xi} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}, \quad R_{-} = 2,053 \cdot \frac{\zeta}{\xi}, \\ C_{-} = 2,11 \cdot \frac{m_i}{m_e}, \quad C_{+} = 3,7 \cdot \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец $Z_{+} = Z$, $Z_{-} = 1$, а ξ , ζ , ξ_T — числа подобия, равные для $Z = 1$

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c\sqrt{\lambda_{+}\lambda_{-}}}{\sqrt{4\pi\rho_0}L_0}, \quad \zeta = 15 \cdot \frac{(4\pi\rho_0)^{5/2} c e^3}{H_0^4 m_i^2}, \quad \xi_T = 21,825 \cdot \frac{\rho_0^{3/2} 10^7 e^5}{H_0^2 c^2 \hbar m_i m_e},$$

где $\ell_c = c/\omega_p$ — скин-длина, L_0 , ρ_0 , H_0 и т. д. — характерные масштабы длины, плотности, напряженности магнитного поля и т. д.

Кроме того, при обезразмеривании полагалось $t_0 = L_0/v_0$, $v_0 = v_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, $E_0 = v_0 H_0/c$, $j_0 = cH_0/(4\pi L_0)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e/(2k)$, $m_i = m_{+}$, $m_e = m_{-}$.

Здесь $\rho(x)$ — заданная функция; штрих обозначает дифференцирование по x . С учетом зависимости μ_Σ , μ_* , μ^* , σ от T_\pm , указанной выше, система (14) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений на $[0, +\infty)$, по решению которой восстанавливаются функции $H(x) = -E'/\omega$ и $j(x) = -iE''/\omega$. Система (14) дополняется безразмерными граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = +\infty$:

$$T_\pm(0) = T^0, \quad U(0) = U_0, \quad E(0) = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega), \quad E'(0) = -\frac{\rho U_0 \omega^2}{\kappa H_x}; \quad (15)$$

$$T_\pm(+\infty) = T^0, \quad U(+\infty) = 0, \quad E(+\infty) = 0, \quad E'(+\infty) = 0,$$

где зависимость $\kappa(\omega)$ получается обезразмериванием равенства (10):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

Анализ результатов расчетов. Рассмотрим решение краевой задачи (14), (15) методом установления [5] для $\xi = 1$, $\xi_T = 3$, $\zeta = 3 \cdot 10^3$, что отвечает типичным параметрам солнечной короны $\rho_0 = 10^{-12}$ г/см², $H_0 = 1$ гс, $Z = 1$. Примем за характерную длину $L_0 = \ell_c = 1$ см. Тогда для характерных величин остальных параметров получим значения: скорость $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} = 2,8 \cdot 10^5$ см/с, $t_0 = L_0 / v_A = c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} / H_0 = 3,45 \cdot 10^{-6}$ с, $T_0 = v_A^2 \lambda_\Sigma e / (2k) = 10^3$ К, дебаевский радиус $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \cong 2 \cdot 10^{-4}$ см, $n_0 = \rho_0 / m_i$. В частности, $r_D \ll L_0$ и много меньше шагов $h = 10^{-2} \dots 10^{-3}$ см используемой разностной сетки при решении краевой задачи методом установления. Кроме того, рассматривается фиксированная амплитуда падающей альфвеновской волны $|U_0| = 0,1$ и полагается $H_x = -1$. Частота волны ω изменяется в диапазоне $-61 \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$. Для базового варианта $\rho(x) \equiv 1$, $\omega = -30$, как следует из работ [5, 6], глубина прогрева $d \cong 12,6$, а максимальные температура электронов и температура ионов $T_- = 3,35$, $T_+ = 2,77$.

Пусть теперь распределение плотности диссипативной плазмы в области $x \geq 0$ имеет вершину, $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $x_0 = 7$, $D = 3$, $A = 50$. Согласно зависимостям, приведенным на рис. 1, а, по сравнению с базовым вариантом глубина проникания альфвеновской волны уменьшилась приблизительно в 3 раза ($d \cong 4,5$), а максимальные температура электронов и температура ионов $T_+ = 2,23$, $T_- = 2,9$ снизились примерно на 15%. Если неоднородность плотности имеет впадину, $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $x_0 = 7$, $D = 3$, $A = -0,9$, то по сравнению с базовым вариантом глубина проникания альфвеновской волны увеличилась приблизительно на 20% ($d \cong 15,1$), максимальные температура электронов и температура ионов $T_+ = 3,55$, $T_- = 2,74$ также возросли (рис. 1, б). Полученные результаты объясняются ролью тормозного излучения электронов, плотность которого со-

ставляет $p_T \sim \rho^2 \sqrt{T_-}$. Если неоднородность имеет вид вершины, то на отрезке $[x_0 - \sqrt{2D}, x_0 + \sqrt{2D}] = [4, 55, 9, 45]$ тормозное излучение существенно возрастает и, по закону сохранения энергии (см. [5, 6]), тепловая энергия электронов и ионов в области $x \geq 0$, заполненной диссипативной плазмой, ведет к уменьшению (увеличению) глубины проникания альфвеновской волны и максимальных значений температуры T_{\pm} . Естественно ожидать, и это подтверждают зависимости, приведенные на рис. 1, что та же закономерность останется, если тормозное излучение растет (падает) не во всем, а в части пространства $x \geq 0$, занятого диссипативной плазмой. Изложенное выше, в частности, объясняет, почему в случае неоднородности плотности типа впадины прогрев электронов и ионов возрастает и по глубине, и по максимальным значениям температуры.

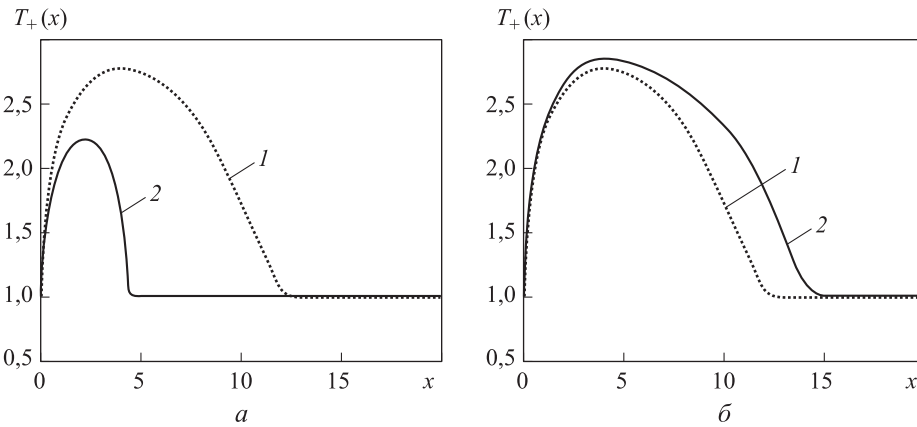


Рис. 1. Зависимости $T_+(x)$ для неоднородности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2/D]$:
 а — базовый вариант $A = 0$ (1), $A = 50$ (2); б — $A = 0$ (1), $A = -0,9$ (2)

Проведенный анализ позволяет предположить, что с уменьшением высоты вершины A глубина проникания альфвеновской волны будет возрастать, а максимальные температура электронов и температура ионов — увеличиваться. Это предположение подтверждается результатами, полученными численно для неоднородности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2/D]$ с различными значениями A (табл. 1).

Таблица 1

Результаты расчетов для неоднородности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2/D]$

A	100	50	25	10	5	2,5	2	1,5	1	0,5	0,1	0
d	6,4	6,5	6,7	7,2	7,5	7,9	8,1	8,5	9,4	11,2	12,3	12,5
T_+	2,5	2,52	2,54	2,57	2,59	2,62	2,6	2,6	2,66	2,71	2,76	2,77
T_-	3,23	3,24	3,25	3,26	3,26	3,27	3,26	3,28	3,29	3,31	3,34	3,35

В работе не даны графики $T_{\pm}(x)$ для вариантов, приведенных в табл. 1, поскольку они однотипны, имеют вид представленных на рис. 1 и качественно

определяются значениями d , T_{\pm} (отметим, что глубины прогрева электронов (d_e) и ионов (d_i) немного различаются, но $d_i \geq d_e$, $d_i \cong d_e$), в табл. 1 приведено значение $d = \max(d_i, d_e) = d_i$. В качестве компенсации на рис. 2, а приведены графики температуры для $\omega = -25$, $A = 50, 25, 2, 0$. Изложенное выше позволяет сделать некоторые предположения. Например, если уменьшить величину D , то глубина проникания альфвеновской волны и максимальная температура электронов и температура ионов должны увеличиться, поскольку сузится область $[x_0 - \sqrt{2D}, x_0 + \sqrt{2D}]$, где возрастает тормозное излучение, следовательно, потери на тормозное излучение уменьшатся. Согласно результатам расчетов, это действительно так, например, для $A = 2$, $x_0 = 8$, $D = 0,5$ получим $d = 8,4$, $T_+ = 2,65$, $T_- = 3,28$ и сделанное предположение, согласно данным, приведенным в табл. 1, справедливо.

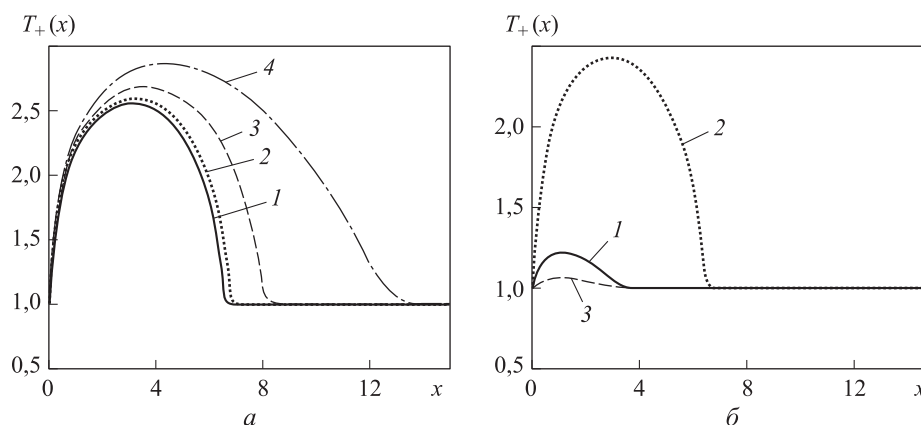


Рис. 2. Зависимости $T_+(x)$ для неоднородности типа вершины

$$\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]:$$

$a - x_0 = 8, A = 50, D = 0,5, \omega = -25, A = 50 (1), A = 25 (2), A = 2 (3),$

$A = 0 (4); b - x_0 = 8, D = 1, A = 50, \omega = -50 (1), \omega = -35 (2), \omega = -9 (3)$

Рассмотрим зависимость поглощения альфвеновской волны от ее частоты ω . Профили $T_+(x)$ для неоднородности плотности типа вершины $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $x_0 = 8, A = 50, D = 1$ и трех частот $\omega = -50, \omega = -35, \omega = -9$ приведены на рис. 2, б. Дополняя эти результаты более полными данными (табл. 2), заключаем, что максимальная глубина проникания альфвеновской волны и максимальные температура электронов и температура ионов приходятся на средние частоты ($\omega \cong -25$), расположенные в окрестности значения $-0,5(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2}$ — середины области допустимых частот интервала $(-\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2}, 0$. Для высоких ($\omega \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2}$) и низких ($\omega \cong 0$) частот альфвеновская волна практически не нагревает диссипативную плазму, в которую проникает и в ней затухает только электромагнитное поле. Полученные результаты объясняются резким падением электрического поля на левой границе

$x = 0$. Согласно граничным условиям (15), при $\omega = -5$ (низкие частоты) $E|_{x=0}$ по модулю меньше $E|_{x=0}$ при $\omega = -30$ (средние частоты) более чем в 3 раза, а при $\omega = -55$ (высокие частоты) — почти в 3 раза. В соответствии с уравнениями (14) это приводит примерно к трехкратному падению электрического и магнитного полей, а также плотности тока внутри области, занятой диссипативной плазмой. Особую роль играет падение плотности тока внутри области $x \geq 0$, которое для низких частот $\omega \cong -5$ усиливается шестикратным падением плотности тока на границе $x = 0$. В случае высоких частот $\omega = -55$ падение плотности тока внутри области $x \geq 0$ отчасти компенсируется двукратным ростом плотности тока на границе $x = 0$. В любом случае почти трехкратное падение плотности тока внутри области $x \geq 0$ приводит примерно к 10-кратному уменьшению джоулева нагрева плазмы, что и объясняет резкое, на порядок, снижение температуры электронов и температуры ионов и фактическое отсутствие нагрева диссипативной плазмы альфвеновской волной. Отметим, что в предельном случае $\omega = 0$ плотность тока на границе равна нулю, $|H| \sim 0,1$, а $E|_{x=0}$ по модулю снижается почти в 1000 раз по сравнению с $E|_{x=0}$ при $\omega = -30$. В еще одном предельном случае $\omega \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2}$ на границе $H = 0$, $E = 0$, а $j|_{x=0}$ по модулю примерно в 2 раза больше значения $j|_{x=0}$ при $\omega = -30$.

Таблица 2

Результаты дополнительных расчетов

$-\omega$	60	55	50	45	35	30	25	20	10	9	8	1
d	0,96	1,3	3,7	6,3	6,5	6,6	6,6	6,6	6,3	2,9	0	0
T_+	1,04	1,05	1,22	1,94	2,43	2,52	2,57	2,57	1,91	1,06	1	1
T_-	1,2	1,22	1,27	2,15	3,01	3,24	3,34	3,31	2,07	1,07	1	1

Заключение. Плазменные неоднородности плотности и частота падающей волны существенно влияют на глубину проникания альфвеновской волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы. Точнее, неоднородности плотности типа вершины тормозят прохождение альфвеновской волны, уменьшая глубину проникания волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы, а неоднородность типа впадины увеличивает глубину проникания волны и степень прогрева электронов и ионов. Высокочастотные ($\omega \sim \omega_{e,c}$) и низкочастотные ($\omega \sim 0$) альфвеновские волны практически не нагревают плазму, а поглощение волны сводится к затуханию электромагнитного поля. Наибольший нагрев плазмы как по глубине, так и по максимальным значениям температуры электронов и температуры ионов приходится на средние частоты ($\omega \sim \omega_{e,c} / 2$).

Отметим, что в нелинейном уравнении теплопроводности относительно T_- в начальный момент времени, когда $T_- \sim 1$, слагаемые для тормозного излучения и релаксации температуры имеют один порядок, который много меньше ($\sim 10^3$ раз) джоулева нагрева. С ростом T_- джоулева нагрева $\sim T_-^{-3/2}$ релаксаци-

онного слагаемого $\sim T_-^{-1/2}$ стремительно уменьшаются, а тормозное излучение $\sim T_-^{1/2}$, наоборот, возрастает. В результате этого через непродолжительное время порядка всех трех слагаемых сравниваются и ни одним из них пренебречь нельзя. К этому следует добавить сильную нелинейность коэффициента теплопроводности $\chi_- \sim T_-^{5/2}$, значительно снижающего влияние джоулева нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.
2. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 290 с.
3. *Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind* / S.W. McIntosh, B.P. Pontieu, M. Carlsson, V. Hansteen, et al. // *Nature*. 2011. Vol. 475. P. 477–480. DOI: 10.1038/nature10235
4. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // *Математическое моделирование*. 2013. Т. 25. № 8. С. 65–79.
5. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59
6. *Taiurskii A.A., Gavrikov M.B. Spatial nonlinear absorption of Alfvén waves by dissipative plasma taking account bremsstrahlung* // *AIP Conference Proceedings*. 2016. Vol. 1773. Art. 090003. DOI: 10.1063/1.4964994
7. Брагинский С.И. Явления переноса // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 1. М.: Госатомиздат, 1963. С. 183–272.
8. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Ч. I // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2006. № 59. 28 с.
9. *Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel* // *J. Plasma Phys.* 2015. Vol. 81. Iss. 5. Art. 495810506. DOI: 10.1017/S0022377815000720
10. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние инерции электронов на течение несжимаемой плазмы в плоском канале // *Математическое моделирование*. 2012. Т. 24. № 9. С. 79–96.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
13. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
14. Имшенник В.С. О теплопроводности плазмы // *Астрономический журнал*. 1961. Т. 38. С. 652–655.
15. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // *ЖЭТФ*. 1937. № 7. С. 203.
16. Грим Г. Процессы излучения в плазме // *Основы физики плазмы*. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1983. 641 с.
17. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 256 с.

Гавриков Михаил Борисович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4), доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Таюрский Алексей Александрович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние плазменной неоднородности и частоты альфвеновской волны на ее поглощение диссипативной плазмой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 82–96. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96

INFLUENCE OF PLASMA INHOMOGENEITY AND ALFVEN WAVE FREQUENCY ON ITS NONLINEAR SPATIAL ABSORPTION BY DISSIPATIVE PLASMA

М.В. Gavrikov^{1,2}

А.А. Tayurskiy¹

tayurskiy2001@mail.ru

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study focuses on absorption of plane Alfvén waves in inhomogeneous incompressible dissipative plasma and the absorption dependence on the wave frequency. Results suggest that taking into account bremsstrahlung leads to the finiteness of the Alfvén wave penetration depth into dissipative plasma and to the appearance of a steady quasistationary absorption regime. The parameters of this regime are the solutions of a certain boundary-value problem for a system of ordinary differential equations on the half-line. Moreover, we considered two types of density inhomogeneities distributed by Gaussian law — the hump and hollow. Finally, we obtained the dependences of the Alfvén wave penetration depth and the maximum values of electron and ion temperature on the value of the hump and frequency of the falling wave

Keywords

Classic MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave absorption, bremsstrahlung

Received 04.05.2017

© BMSTU, 2018

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10278)

REFERENCES

- [1] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical physics. Vol. 8. Continuum dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 621 p.
- [2] Alfvén H. Cosmical electrodynamics: fundamental principles. Oxford University Press, 1953. 237 p.

- [3] McIntosh S.W., Pontieu B.P., Carlsson M., Hansteen V., Boerner P., Goossens M. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind. *Nature*, 2011, vol. 475, pp. 477–480. DOI: 10.1038/nature10235
- [4] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Spatial nonlinear absorption of Alfvén waves in the dissipative plasma. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2013, vol. 25, no. 8, pp. 65–79 (in Russ.).
- [5] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Spatial nonlinear Alfvén wave absorption by dissipative plasma. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 2, pp. 40–59 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59
- [6] Taiurskii A.A., Gavrikov M.B. Spatial nonlinear absorption of Alfvén waves by dissipative plasma taking account bremsstrahlung. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1773, art. 090003. DOI: 10.1063/1.4964994
- [7] Braginskiy S.I. Yavleniya perenosa. Voprosy teorii plazmy. Vyp. 1 [Transport phenomena. In: Issues of plasma theory. Iss. 1]. Moscow, Gosatomizdat Publ., 1963. Pp. 183–272.
- [8] Gavrikov M.B. The basic equations for two-fluid electromagnetic hydrodynamics. Part I. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha* [Preprint, Inst. Appl. Math., RAS], 2006, no. 59, 28 p. (in Russ.).
- [9] Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel. *J. Plasma Phys.*, 2015, vol. 81, iss. 5, art. 495810506. DOI: 10.1017/S0022377815000720
- [10] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. The influence of electron inertia on the incompressible plasma flow in a planar channel. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2012, vol. 24, no. 9, pp. 79–96 (in Russ.).
- [11] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Pergamon Press, 1987. 551 p.
- [12] Spitzer L. Physics of fully ionized gases. Wiley, 1962. 192 p.
- [13] Chapman S., Cowling T.G. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge University Press. 431 p.
- [14] Imshennik V.S. On the thermal conductivity of plasma. *Astronomicheskii zhurnal* [Astronomy Reports], 1961, vol. 38, pp. 652–655 (in Russ.).
- [15] Landau L.D. Kinetic equation in the case of Coulomb interaction. *Phys. Z. Sowjetunion*, 1936, vol. 10, pp. 154.
- [16] Grim G. Protsessy izlucheniya v plazme. Osnovy fiziki plazmy. T. 1 [Radiation processes in plasma. In: Fundamentals of plasma physics. Vol. 1]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 641 p.
- [17] Chukbar K.V. Lektsii po yavleniyam perenosa v plazme [Lectures on transport phenomena in plasma]. Dolgoprudnyy, Intellect Publ. house, 2008. 256 p.

Gavrikov M.B. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Tayurskiy A.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Miuskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Influence of Plasma Inhomogeneity and Alfvén Wave Frequency on its Nonlinear Spatial Absorption by Dissipative Plasma. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 82–96 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие авторов
И.В. Блудовой, Э.Н. Беляновой

**«Начала топологии в примерах
и задачах»**

Рассмотрены различные классические примеры топологических и метрических пространств и непрерывных отображений, сформулированы все необходимые топологические определения и утверждения. Читателям предложено самостоятельно доказать некоторые свойства указанных выше топологических и метрических пространств, а в случае недостаточной успешности попыток получить эти доказательства — узнать подробные решения предложенных задач.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru