УДК 517.958+536.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-4-13

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И.С. Граник
А.Ф. Грибов alexandr-gribov@list.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Изучена эволюция теплового возмущения в нелинейной среде, коэффициент теплопроводности которой явно зависит от времени и является степенной функцией температуры с показателем, зависящим от времени, при наличии в этой среде объемного поглощения теплоты. Наличие младших членов в квазилинейном параболическом уравнении, описывающем эти процессы переноса, влияют на существование и характер процесса теплопереноса в анализируемой среде. Качественно рассмотрены физические свойства изучаемого процесса и его специфические особенности, в частности такие режимы, как режим пространственной локализации и его разновидность — стабильная и метастабильная локализация. Рассмотрена задача о влиянии мгновенного источника на процесс распространения теплового возмущения в изотропном пространстве. Приведены условия существования решения задачи Коши, описывающей этот процесс, а также положение фронта тепловой волны, разделяющего невозмущенную зону от возмущенной в произвольный момент времени. Указаны условия пространственной локализации этих возмущений, т. е. предсказаны границы, за пределы которых тепловые возмущения от этого источника не проникают

Ключевые слова

Квазилинейное параболическое уравнение, нестационарная нелинейность, пространственная локализация

Поступила в редакцию 07.07.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00269)

Введение. Исследование процессов переноса энергии в распределенных системах (в частности, в высокотемпературных средах) вынуждает учитывать некоторые особые свойства этих сред. К таким свойствам следует отнести зависимость теплоемкости и коэффициента теплопроводности среды от температуры, а также вклад в энергетический баланс объемного излучения (поглощения), экзо- и эндотермических процессов ионизации, химических реакций горения и пр. Исследование нелинейных уравнений переноса энергии (нелинейность обусловлена учетом перечисленных факторов) привело к обнаружению ряда нелинейных эффектов, а именно инерции [1] и пространственной локализации [2] тепловых процессов.

В настоящей работе рассмотрено квазилинейное параболическое уравнение

$$u_t = \mathrm{div}[K(t, u, u_x)\,\mathrm{grad}u] + F(t, u),$$

описывающее широкий класс нестационарных диффузионных процессов переноса, таких как теплопроводность, турбулентная фильтрация, течение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом, диффузия и т. д., когда физические характеристики среды являются функциями не только $u(t, x)$, но и времени t [3]. Здесь и далее использованы следующие обозначения: $u_x = \partial u / \partial x$; $u_t = \partial u / \partial t$.

Постановка задачи. Оставаясь в рамках физической модели теплопроводности, рассмотрим процесс переноса теплоты в среде, коэффициент теплопроводности которой явно зависит от времени и степенным образом от температуры. В свою очередь, показатель степени зависит от времени: $K(t, u, u_x) = \mu\left[u^{\sigma}\right]$; $\mu = \mu(t) > 0$; $\sigma = \sigma(t) > 0$. Предположим также, что в такой среде протекают процессы, приводящие к поглощению (выделению) тепловой энергии с объемной мощностью, зависящей от локального значения температуры и времени специальным образом $F(t, u) = -\gamma(t) u \ln u$. Эволюция структур в этих средах существенно отличается от классических диффузионных процессов, описываемых линейными параболическими уравнениями, и проявляется при исследовании распространения возмущений в нелинейных средах по нулевому невозмущенному фону, когда в соответствующих задачах начальное распределение $u(0, x) = u_0(x)$, описывающее профиль структуры в начальный момент времени, задано в виде финитной функции с компактным носителем $u(0, x) = u_0(x) \in C\left(R_+^1\right)$; $\mathrm{supp}\, u_0(x) = [0, l]$.

Под решением задачи

$$u_t = \mu(t)[u^{\sigma} u_x]_x - \gamma(t) u \ln u; \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{2}$$

будем понимать обобщенное решение, имеющее слабый разрыв в области вырождения, но обладающее тем свойством, что всюду в $R_{++}^2 = \{(t, x) : t \ge 0,\ x \ge 0\}$ сохраняется непрерывность функций u и $\Pi = \mu(t) u^{\sigma} u_x$, что физически равносильно условиям непрерывности температуры $u(t, x)$ и теплового потока Π. Это является естественным для выбранной физической модели процесса. Исследованию подобных задач посвящено большое число работ [4–13].

Построение аналитических решений. Первое решение. Теорема 1. Задача (1), (2) при $u_0 = b_0 (l - x)^{1/\sigma(0)}$ имеет решение

$$u(t, x) = \begin{cases} b_0^{\varphi(t)}[x_{\text{ф}}(t) - x]^{m\varphi(t)}, & x < x_{\text{ф}}(t); \\ 0, & x \ge x_{\text{ф}}(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t) = \exp\left[-\int\limits_0^t \gamma(\eta)\, d\eta\right]$, $x_{\text{ф}}(t) = m b_0^{1/m} \int\limits_0^t \mu(\eta)\varphi(\eta)\, d\eta + l$, $m = \mathrm{const} > 0$, такая, что $m\varphi\sigma = 1$.

◀ Покажем, что при определенных соотношениях между функциями $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ и $\mu(t)$ задача (1), (2) имеет точное аналитическое решение, которое будем искать в виде

$$u(t,x)=\left[w(t,x)\right]^{\varphi(t)}, \tag{3}$$

где $\varphi=\varphi(t)$ — неопределенная функция времени. Подставив (3) в (1), получим

$$\frac{\dot\varphi}{\varphi}u\ln u+\varphi w_t w^{\varphi-1}=\mu\varphi\left[w^{\varphi\sigma+\varphi-1}w_x\right]_x-\gamma(t)u\ln u.$$

Если потребовать, чтобы

$$\varphi(t)=\exp\left[-\int\limits_0^t\gamma(\eta)d\eta\right], \tag{4}$$

то задача (1), (2) сводится к следующей задаче:

$$w^{\varphi-1}w_t=\mu\left[w^{\varphi\sigma+\varphi-1}w_x\right]_x;$$
$$w(0,x)=u_0(x). \tag{5}$$

Будем искать решение задачи (5) первоначально в виде

$$w(t,x)=\begin{cases} b\xi^m, & \xi>0;\\ 0, & \xi\le 0,\end{cases} \tag{6}$$

где $b=b(t)>0,\ \xi=x_\text{ф}(t)-x,\ m=\text{const}>0.$ Подставляя (6) в (5), получаем равенство

$$b^{\varphi-1}\xi^{m(\varphi-1)}\left[\dot b\xi^m+mb\xi^{m-1}\dot x_\text{ф}\right]=m\mu\left[m\varphi(\sigma+1)-1\right]b^{\varphi(\sigma+1)}\xi^{\varphi m(\sigma+1)-2}, \tag{7}$$

из которого следует, что поиск решения возможен в двух случаях. Первый из них при $b(t)=b_0=\text{const}>0.$ Тогда во втором случае при $m\varphi\sigma=1$ скорость распространения фронта волны возмущения определяется соотношением

$$\dot x_\text{ф}(t)=b_0^{1/m}\frac{\mu(t)}{\sigma(t)},$$

или, что то же самое, $\dot x_\text{ф}(t)=mb_0^{1/m}\mu(t)\varphi(t).$ Это свидетельствует о том, что распространение возмущений происходит в режиме волны разогрева $\dot x_\text{ф}(t)\ge 0,$ а пространственная локализация этих возмущений достигается при сходимости несобственного интеграла $\int\limits_0^\infty\mu(\eta)\varphi(\eta)d\eta.$ Окончательно можно утверждать, что решение задачи (1), (2) при $b_0=\text{const}>0$ имеет вид

$$u(t,x)=\begin{cases} b_0^{\varphi(t)}[x_\text{ф}(t)-x]^{m\varphi(t)}, & x<x_\text{ф}(t);\\ 0, & x\ge x_\text{ф}(t),\end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — функция, которую находят из требования (4); $x_\text{ф}(t) = mb_0^{1/m}\int\limits_0^t \mu(\eta)\times$ $\times\varphi(\eta)d\eta + l.$ ►

Второе решение. Второй путь поиска решения задачи (1), (2) в представлении (3), (6) очевиден в случае, когда $\dot{x}_\text{ф}(t) \equiv 0,$ т. е. когда фронт волны стабильно неподвижен, что свидетельствует о самолокализации процесса. Предположим, что решение задачи (1), (2) стабильно (метастабильно) локализовано, если $\operatorname{supp} u(t,x) \equiv \operatorname{supp} u_0(x)$ для $\forall t \in [0,\infty)$ (соответственно для $\forall t \in [0,T],$ $T = \mathrm{const} < \infty$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Задача (1), (2) при $u_0(x) = b_0(l-x)^m$ имеет решение

$$u(t,x) = \begin{cases} \left\{ b_0^{-2/m} - 2\int\limits_0^t \mu(\eta)\left[1 + m\varphi(\eta)\right]d\eta \right\}^{-1/\sigma} (l-x)^{2/\sigma}, & x < l; \\ 0, & x \ge l, \end{cases}$$

где $\varphi(t) = \exp\left[-\int\limits_0^t \gamma(\eta)d\eta\right],$ $m = \mathrm{const} > 0,$ такая, что $m\varphi\sigma = 2,$ а несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \mu(\eta)\left[1 + m\varphi(\eta)\right]d\eta < b_0^{-2/m}/2$ является сходящимся.

◄ При $\dot{x}_\text{ф}(t) \equiv 0$ уравнение (7) вырождается в уравнение

$$\dot{b} = m\mu\left[\varphi m(\sigma+1) - 1\right] b^{\varphi\sigma+1} \xi^{m\varphi\sigma-2},$$

откуда следует, что решение возможно лишь при условии $m\varphi\sigma = 2,$ где $\varphi(t)$ удовлетворяет (4), а функция $b(t)$ — уравнению $b^{-1-2/m}\dot{b} = m\mu(1 + m\varphi).$ Отсюда получаем

$$b(t) = \left\{ b_0^{-2/m} - 2\int\limits_0^t \mu(\eta)\left[1 + m\varphi(\eta)\right]d\eta \right\}^{-m/2},$$

где $b_0 = \mathrm{const}.$

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^\infty \mu(\eta)\left[1 + m\varphi(\eta)\right]d\eta < b_0^{-2/m}/2$ в совокупности с согласованным начальным распределением $u(0,x) = u_0(x) =$ $= b_0(l-x)^m$ позволяет найти решение задачи (1), (2), описывающее режим стабильной локализации с неподвижным фронтом $x_\text{ф} = l = \mathrm{const}$:

$$u(t,x) = \begin{cases} \left\{ b_0^{-2/m} - 2\int\limits_0^t \mu(\eta)\left[1 + m\varphi(\eta)\right]d\eta \right\}^{-1/\sigma} (l-x)^{2/\sigma}, & x < l; \\ 0, & x \ge l. \end{cases} \quad ►$$

Третье решение. Еще одно решение системы (5) можно получить, полагая в (6) $\xi = x_{\text{ф}}^{\alpha} - x^{\alpha},\ \alpha \neq 1.$ В этом случае система (5) принимает вид

$$b^{\varphi-1}\xi^{m(\varphi-1)}\left[\dot{b}\xi^{m} + mb\xi^{m-1}\alpha x_{\text{ф}}^{\alpha-1}\dot{x}_{\text{ф}}\right] =$$
$$= \mu\alpha m b^{\varphi(\sigma+1)} x^{\alpha-2}\left\{\alpha\left[\varphi m(\sigma+1)-1\right]x_{\text{ф}}^{\alpha}\xi^{m\varphi(\sigma+1)-2} + \left[1-\alpha m\varphi(\sigma+1)\right]\xi^{m\varphi(\sigma+1)-1}\right\},$$

откуда следует, что точное решение возможно при $\alpha = 2$ и $m\varphi\sigma = 1.$ Тогда приведенное уравнение имеет вид

$$b^{\varphi-1}\left[\xi\dot{b} + 2mbx_{\text{ф}}\dot{x}_{\text{ф}}\right] = 2\mu m b^{\varphi(\sigma+1)}\left\{2\left[m\varphi(\sigma+1)-1\right]x_{\text{ф}}^{2} + \xi\left[1-2m\varphi(\sigma+1)\right]\right\}.$$

Анализ этого уравнения показывает, что точное решение существует при выполнении условий

$$\dot{b} + 2m\mu b^{\varphi\sigma+1}\left(1+\frac{2}{\sigma}\right) = 0;$$

$$\frac{\dot{x}_{\text{ф}}}{x_{\text{ф}}} = 2\frac{\mu}{\sigma}b^{\varphi\sigma},$$

откуда получаем

$$b(t) = \left[b_0^{-1/m} + 2\int_0^t \mu\left(1+\frac{2}{\sigma}\right)dt\right]^{-m};$$

$$x_{\text{ф}}(t) = l\exp\left(2\int_0^t \frac{\mu}{\sigma}b^{1/m}dt\right).$$

Окончательно имеем, что решение задачи (1), (2) при $u_0(x) = b_0\left(l^2 - x^2\right)^m$ имеет вид (3), (4), что, в свою очередь, сводит задачу (1), (2) к виду (5), решение которой (6) при $\xi = x_{\text{ф}}^2 - x^2$ и $m\varphi\sigma = 1$ при $b_0 = \text{const},\ m = \text{const}$ доказывает существование решения.

Задача о влиянии мгновенного теплового источника. Предыдущее исследование позволяет подойти к решению задачи о влиянии мгновенного источника на процесс распространения теплового возмущения в изотропном пространстве

$$u_t = \frac{\mu(t)}{x^{s-1}}\left[x^{s-1}u^{\sigma}u_x\right]_x + F(t,u), \tag{8}$$

$$u(0,x) = Q_0\delta\left(x^s\right), \tag{9}$$

где $Q_0 = Q/(\rho c),$ Q — мгновенно выделяемая энергия в начальный момент времени $t = 0;$ $\delta\left(x^s\right)$ — дельта-функция Дирака, $s = 1,2,3$ соответствует случаям плоской, осевой и центральной симметрий; $\sigma = \sigma(t) > 0.$ Отметим также, что распространение тепловой волны от мгновенного теплового источника рассматривалось как в среде, движущейся с постоянной скоростью [3], так и в среде с объемным поглощением теплоты [4].

Согласно проведенному анализу, решение задачи (8), (9) следует искать в виде

$$u(t,x)=\begin{cases} a(t)\left[x_{\text{ф}}^2-x^2\right]^{\frac{1}{\sigma(t)}}, & |x|<x_{\text{ф}}(t); \\ 0, & |x|\geq x_{\text{ф}}(t\}. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (8), получаем систему уравнений

$$F(t,u)=-\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}u\ln u; \tag{11}$$

$$(\sigma\ln a)'_t+2\mu a^{\sigma}\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)=0; \tag{12}$$

$$(\ln x_{\text{ф}})'_t=\frac{2\mu}{\sigma}a^{\sigma}. \tag{13}$$

Обозначив в уравнении (12) выражение $\sigma\ln a=K(t)$, получим уравнение

$$\dot{K}+2\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)e^{K}=0 \text{ или } e^{-K}\dot{K}=-2\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right).$$

Отсюда следует

$$e^{-K}=2\int_0^t\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)dt+A,\ A=\text{const}.$$

Тогда, поскольку $K(t)=-\ln\left[A+2\int_0^t\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)dt\right]$, $a(t)=\left[A+2\int_0^t\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)dt\right]^{-1/\sigma}$. Учитывая физическую постановку задачи, при $t\to 0$ имеем $a(t)\to\infty$, отсюда $A=\text{const}=0.$ Окончательно

$$a(t)=\left[2\int_0^t\mu\left(s+\frac{2}{\sigma}\right)dt\right]^{-1/\sigma}, \tag{14}$$

а положение фронта тепловой волны в любой момент времени определяется как

$$x_{\text{ф}}(t)=C\exp\left[2\int_0^t\frac{\mu}{\sigma}a^{\sigma}dt\right]. \tag{15}$$

Учитывая, что начальное распределение $u(0,x)=u_0(x)$ в рассматриваемой задаче Коши для уравнения (8) представляет собой функцию типа дельта-функции (9), удовлетворяющую условию

$$\int_0^{\infty}u_0(x)M(s)x^{s-1}dx=Q_0, \tag{16}$$

где

$$M(s)=\begin{cases}2, & s=1;\\ 2\pi, & s=2;\\ 4\pi, & s=3,\end{cases}$$

определим константу C, входящую в соотношение (15), используя интегральное условие (16), которое можно записать в виде $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^{x_\text{ф}} u(t,x)M(s)x^{s-1}dx=Q_0$. Применяя (10), перепишем последний интеграл как

$$M(s)\int\limits_0^{x_\text{ф}} a(t)\,x_\text{ф}^{2/\sigma+s}\left(1-\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right)^2\right)^{1/\sigma}\frac{x^{s-1}}{x_\text{ф}^{s-1}}\frac{dx}{x_\text{ф}},$$

отсюда

$$\int\limits_0^{x_\text{ф}} u(t,x)M(s)x^{s-1}dx=M(s)a(t)\,x_\text{ф}^{2/\sigma+s}\int\limits_0^1\left(1-\eta^2\right)^{1/\sigma}\eta^{s-1}d\eta=$$
$$=\frac{M(s)}{2}a(t)\,x_\text{ф}^{2/\sigma+s}B\left(\frac{s}{2},\frac{\sigma+1}{\sigma}\right),$$

где $\eta=x/x_\text{ф}$.

Это позволяет вывести условие существования решения задачи Коши

$$\lim_{t\to 0}a(t)\,x_\text{ф}^{2/\sigma+s}=R=\text{const}\neq 0.$$

Тогда $Q_0=\dfrac{RM(s)}{2}B\left(\dfrac{s}{2},\dfrac{\sigma(0)+1}{\sigma(0)}\right)$. Согласно (15), движение фронта температурной волны происходит в режиме «волны разогрева» $\left(\dot{x}_\text{ф}(t)\geq 0\,\forall t>0\right)$, а локализация этих возмущений (когда можно указать границу, за которую волна нагрева не проникает) имеет место при сходимости интеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mu}{\sigma}a^{\sigma}dt$.

Заключение. Рассмотренные методы поиска, как и решения, наряду с полученными ранее решениями [1–6, 10–12], позволяют с помощью теорем о монотонной зависимости от параметров задач и теорем сравнения [3–5] исследовать и оценивать те решения, которые аналитическим путем получить затруднительно или невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвященный 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.

2. *Мартинсон Л.К., Павлов К.Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1048–1053.

3. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 368 с.

4. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

5. *Волосевич П.П., Леванов Е.И.* Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007. 488 с.

7. *Кудряшов Н.А., Чмыхов Н.А.* Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 1. С. 110–120.

8. *Формалев В.Ф., Рабинский Л.Н.* Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве с нелинейными характеристиками // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 5. С. 704–709. DOI: 10.7868/S0040364414050056

9. *Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н.* Локализация тепловых возмущений в нелинейных анизотропных средах с поглощением // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 579–584. DOI: 10.7868/S0040364415040109

10. *Граник И.С., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б.* Температурные волны в движущихся средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 5. С. 1340–1344.

11. *Граник И.С.* К вопросу о локализации температурных возмущений в средах с объемным поглощением тепла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 3. С. 770–774.

12. *Граник И.С., Мартинсон Л.К.* Движение фронта тепловой волны в нелинейной среде с поглощением // Инж.-физ. журнал. 1980. Т. 39. № 4. С. 728–731.

13. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле, содержащем сферический очаг разогрева с теплопоглощающим покрытием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 97–106.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-97-106

Граник Илья Семенович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Грибов Александр Федорович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Граник И.С., Грибов А.Ф. Об одном решении нелинейного параболического уравнения с нестационарным показателем нелинейности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 4. С. 4–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-4-13

ANALYTICAL SOLUTION OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH NON-STATIONARY EXPONENT OF NONLINEARITY

I.S. Granik
A.F. Gribov alexandr-gribov@list.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We study the evolution of thermal perturbation in a nonlinear medium whose thermal conduction coefficient explicitly depends on time and is a power function of temperature, with its exponent also being time-dependent if there is volume absorption of heat in this medium. The presence of lowest terms in the quasi-linear parabolic equation governing these transport processes affects the properties of the heat transport process in the medium under consideration. The analysis of physical properties of the studied process is conducted and its specific characteristics, i. e. the spatial localization mode, and its variations, i. e. stable and metastable localization, are examined. The effect of an instantaneous heat source on propagation of thermal perturbation in an isotropic medium is considered. The study introduces the conditions for existence of a closed-form solution of the Cauchy problem describing the process, as well as the location of the heat wave front that separates the perturbed and unperturbed zones at an arbitrary moment in time. The conditions for the spatial localization of these perturbations are indicated, i. e. the boundaries are predicted beyond which thermal perturbations from this source do not penetrate

Keywords

Quasi-linear parabolic equation, non-stationary non-linearity, spatial localization

Received 07.07.2017

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-07-00269)

REFERENCES

[1] Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. [Towards a theory of heat propagation with heat conductivity depending on temperature]. *Sb., posvyashchennyy 70-letiyu akad. A.F. Ioffe* [Collection, dedicated to 70th anniversary of A.F. Ioffe]. Moscow, AN SSSR Publ., 1950, pp. 61–71 (in Russ.).

[2] Martinson L.K., Pavlov K.B. The problem of the three-dimensional localization of thermal perturbations in the theory of non-linear heat conduction. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, vol. 12, iss. 4, pp. 261–268. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90131-0

[3] Martinson L.K., Malov Yu.I. Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 368 p.

[4] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy [Blow-up regimes in problems for quasi-linear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 480 p.

[5] Volosevich P.P., Levanov E.I. Avtomodel'nye resheniya zadach gazovoy dinamiki i teploperenosa [Self-similar solutions of gas dynamics and heat transfer problems]. Moscow, MFTI Publ., 1997. 240 p.

[6] Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G., Samarskiy A.A. Struktury i khaos v nelineynykh sredakh [Structure and chaos in non-linear mediums]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 488 p.

[7] Kudryashov N.A., Chmykhov N.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, iss. 1, pp. 107–117. DOI: 10.1134/S0965542507010113

[8] Formalev V.F., Rabinskii L.N. Wave heat transfer in anisotropic space with nonlinear characteristics. *High Temperature*, 2014, vol. 52, iss. 5, pp. 675–680. DOI: 10.1134/S0018151X14050058

[9] Formalev V.F., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. Localization of thermal disturbances in nonlinear anisotropic media with absorption. *High Temperature*, 2015, vol. 53, iss. 4, pp. 548–553. DOI: 10.1134/S0018151X15040100

[10] Granik I.S., Martinson L.K., Pavlov K.B. Temperature waves in moving media. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, vol. 14, iss. 5, pp. 240–246. DOI: 10.1016/0041-5553(74)90213-4

[11] Granik I.S. The localization of temperature perturbations in media with volume absorption of heat. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 18, iss. 3, 1978, pp. 246–252. DOI: 10.1016/0041-5553(78)90188-X

[12] Granik I.S., Martinson L.K. Heat wave front motion in non-linear medium with absorption. *Inzh.-fiz. zhurnal*, 1980, vol. 39, no. 4, pp. 728–731 (in Russ.).

[13] Attetkov A.V., Volkov I.K. Self-similar solution of heat transport problems in solid with heat-absorbing coating spherical hot spot. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 97–106 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-97-106

Granik I.S. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Gribov A.F. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Granik I.S., Gribov A.F. Analytical Solution of Nonlinear Parabolic Equations with Non-Stationary Exponent of Nonlinearity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 4, pp. 4–13 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-4-13