УДК 517.928.4 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

В.Н. Орлов[1] orlowvn@rambler.ru
О.А. Ковальчук[1]
Е.П. Линник[2] aplinnik@mail.ru
И.И. Линник[2]

[1] **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация**
[2] **Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Республика Крым, Российская Федерация**

Аннотация

Рассмотрен класс обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью второй степени, обладающих подвижными особыми точками алгебраического типа и в общем случае неразрешимых в квадратурах. Существующая классическая теория, в частности теорема Коши существования решения дифференциального уравнения, в таком случае практически не применима. Для решения этой категории уравнений одним из авторов настоящей статьи разработан аналитический приближенный метод, состоящий из шести математических задач. Представлено исследование аналитического приближенного решения в области аналитичности, включающее в себя доказательство теоремы существования решения, построение аналитического приближенного решения и исследование влияния возмущения начальных условий на аналитическое приближенное решение. Доказательство теоремы существования основано на методе мажорант в новом варианте, позволяющем провести намеченные исследования. Приведен вычислительный эксперимент с привлечением апостериорной оценки погрешности, с учетом которой можно существенно улучшить получаемые априорные оценки погрешности

Ключевые слова

Нелинейное дифференциальное уравнение, теорема существования, аналитическое приближенное решение, подвижная особая точка, апостериорная оценка погрешности

Поступила в редакцию 28.09.2017

Введение. Один из важных аспектов дифференциальных уравнений — математическая модель различных процессов и явлений в теории оптимального управления [1, 2], теории эволюционных процессов [3], нелинейной оптики [4], теории упругости [5], нелинейной диффузии [6], оптимизации стержня реактора [7], нелинейной волновой теории [8], жизнестойкости зданий и сооружений [9, 10]. Если для линейных дифференциальных уравнений математическая теория разработана в достаточно полном объеме, то для нелинейных дифференциальных уравнений требуется развитие математической теории. Наибольший интерес представляют нелинейные дифференциальные уравнения с подвижными особыми точками, которые относятся к классу не разрешимых в общем случае в квадратурах. Согласно перечисленным выше работам, эти уравнения имеют практическое приложение в различных областях. Следует отметить несколько работ, посвященных разработке аналитического приближенного метода решения таких уравнений, позволяющего исследователям строить более сложные и точные математические модели, приводящие к нелинейным дифференциальным уравнениям [11–14].

Материалы и методы решения. С учетом необходимого условия существования подвижной особой точки [16] в работе [17] было доказано ее существование для класса нелинейных дифференциальных уравнений $y''' = y^2 + r(x)$ и построено аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки. В настоящей работе для рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений продолжено исследование решения в области аналитичности, включающее в себя следующие этапы: 1) доказательство теоремы существования решения в области аналитичности; 2) построение аналитического приближенного решения; 3) исследование влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение. Следует отметить, что классическая теорема Коши существования решения дифференциального уравнения в силу специфики доказательства не позволяет провести второй и третий этапы исследования.

Результаты. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x).$$

Как показано в работе [17], с помощью определенной замены переменной уравнение приводится к нормальному виду. Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^2 + r(x); \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области* $|x - x_0| < \rho_1$, $\rho_1 = \text{const}$;

2) $\exists M_n : \left|\dfrac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \le M_n$.

Тогда $y(x)$ *является аналитической функцией*

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n \tag{3}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, *где*

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{M+1}}\right\}; \quad M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right|\right\}.$$

◄ В силу условия теоремы имеем

$$r(x)=\sum_{0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n. \tag{4}$$

Представим $y(x)$ в виде (3) и подставим вместе с (4) в (1):

$$\sum_{3}^{\infty}n(n-1)(n-2)C_n(x-x_0)^{n-3}=\sum_{0}^{\infty}C_n^*(x-x_0)^n+\sum_{0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n,$$

где $C_n^*=\sum_{i=0}^{n}C_{n-i}C_i$. Последнее обратится в тождество при условии

$$n(n-1)(n-2)C_n=C_{n-3}^*+A_{n-3},\quad n=3,4,\ldots \tag{5}$$

Рекуррентное соотношение (5) позволяет получить выражения для коэффициентов C_n, что можно выполнить на компьютере. На основании полученных выражений строим гипотезу для оценок коэффициентов C_n:

$$|C_{3n}|\le\frac{(M+1)^{n+1}}{3n(3n-1)(3n-2)};\quad |C_{3n+1}|\le\frac{(M+1)^{n+1}}{3n(3n+1)(3n-1)};$$
$$|C_{3n+2}|\le\frac{(M+1)^{n+1}}{3n(3n+1)(3n+2)}. \tag{6}$$

Докажем справедливость оценок в случае коэффициентов C_{3n+3}. Из рекуррентного соотношения (5) имеем $(3n+1)(3n+2)(3n+3)C_{3n+3}=C_{3n}^*+A_{3n}$ или, с учетом гипотезы (6), —

$$|C_{3n+3}|\le\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\times$$
$$\times\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(M+1)^{n+1-i}}{(3n-3i)(3n-3i-1)(3n-3i-2)}\frac{(M+1)^{i+1}}{(3i(3i-1)(3i-2))^*}+M\right)\le$$
$$\le\frac{(M+1)^{n+2}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},$$

где

$$(3i(3i-1)(3i-2))^*=\begin{cases}1, & i=0;\\ 3i(3i-1)(3i-2), & i=1,2,\ldots\end{cases}$$

Аналогичным образом убеждаемся в оценках коэффициентов C_{3n+1} и C_{3n+2}. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M+1)^{n+1}|x-x_0|^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)},$$

который на основании достаточного признака сходимости имеет область

$$|x-x_0|<\frac{1}{\sqrt[3]{M+1}}.$$

Следовательно, в силу специфики оценок (6) для коэффициентов C_n в (3), для ряда в выражении (3) получаем область $|x-x_0|<\rho_2$, где $\rho_2=\min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{M+1}}\right\}$. ►

Теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x)=\sum_0^N C_n(x-x_0)^n, \tag{7}$$

а следующая теорема — оценить его погрешность

$$\Delta y_N(x)=|y-y_N(x)|=\left|\sum_{N+1}^{\infty} C_n(x-x_0)^n\right|.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (7) задачи (1), (2) в области* $|x-x_0|<\rho_2$ *для* $N+1=3n$ *справедлива оценка*

$$\Delta y_N(x)\le\frac{(M+1)^{\frac{N+4}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(1-(M+1)|x-x_0|^3)(N+1)}\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+2)}+\frac{|x-x_0|^2}{(N+2)(N+3)}\right),$$

для $N+1=3n+1$ *— оценка*

$$\Delta y_N(x)\le\frac{(M+1)^{\frac{N+3}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(1-(M+1)|x-x_0|^3)(N+1)}\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+2)}+\frac{(M+1)|x-x_0|^2}{(N+2)(N+3)}\right)$$

и для $N+1=3n+2$ *— оценка*

$$\Delta y_N(x)\le\frac{(M+1)^{\frac{N+2}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(1-(M+1)|x-x_0|^3)(N+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{(M+1)|x-x_0|}{N(N+2)}+\frac{(M+1)|x-x_0|^2}{(N+2)(N+3)}\right).$$

Здесь ρ_2, M *— величины, взятые из теоремы 1.*

◄ По определению

$$\Delta y_N(x)=|y-y_N(x)|=\left|\sum_{N+1}^{\infty} C_n(x-x_0)^n\right|$$

или, с учетом специфики коэффициентов C_n в (6), для $N+1=3n$ имеем

$$\Delta y_N(x)=$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{\infty} C_{3(n+k)}(x-x_0)^{3(n+k)}+\sum_{k=0}^{\infty} C_{3(n+k)+1}(x-x_0)^{3(n+k)+1}+\sum_{k=0}^{\infty} C_{3(n+k)+2}(x-x_0)^{3(n+k)+2}\right|\le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(M+1)^{n+k+1}\,|\,x-x_0\,|^{3(n+k)}}{3(n+k)(3(n+k)-1)(3(n+k)-2)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(M+1)^{n+k+1}\,|\,x-x_0\,|^{3(n+k)+1}}{(3(n+k)+1)3(n+k)(3(n+k)-1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(M+1)^{n+k+1}\,|\,x-x_0\,|^{3(n+k)+2}}{(3(n+k)+2)(3(n+k)+1)3(n+k)}\le$$

$$\le \frac{(M+1)^{\frac{N+4}{3}}\,|\,x-x_0\,|^{N+1}}{(1-(M+1)\,|\,x-x_0\,|^3)(N+1)}\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{|\,x-x_0\,|}{N(N+2)}+\frac{|\,x-x_0\,|^2}{(N+2)(N+3)}\right).$$

Аналогичным образом для $N+1=3n+1$ получаем оценку

$$\Delta y_N(x)\le \frac{(M+1)^{\frac{N+3}{3}}\,|\,x-x_0\,|^{N+1}}{(1-(M+1)\,|\,x-x_0\,|^3)(N+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{|\,x-x_0\,|}{N(N+2)}+\frac{(M+1)\,|\,x-x_0\,|^2}{(N+2)(N+3)}\right),$$

для $N+1=3n+2$ — оценку

$$\Delta y_N(x)\le \frac{(M+1)^{\frac{N+2}{3}}\,|\,x-x_0\,|^{N+1}}{(1-(M+1)\,|\,x-x_0\,|^3)(N+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)}+\frac{(M+1)\,|\,x-x_0\,|}{N(N+2)}+\frac{(M+1)\,|\,x-x_0\,|^2}{(N+2)(N+3)}\right).$$

Приведенные оценки приближенного решения справедливы в области $|\,x-x_0\,|<\rho_2$, где $\rho_2=\min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{\sqrt[3]{M+1}}\right\}$. ►

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$y'''=y^2+x,\quad y(1)=0,5,\quad y'(1)=0,5,\quad y''(1)=1;$$

$$M=1,\quad \rho_2=\frac{1}{\sqrt[3]{2,5}}=0,7368063.$$

Значения оценки аналитического приближенного решения в случае точных начальных условий приведены ниже, где $y_8(x)$ — приближенное значение решения; Δ_1, Δ_2 — априорная и апостериорная оценки погрешности. Для $\varepsilon=6\cdot10^{-6}$ необходима структура аналитического приближенного решения с $N=12$. В структуре аналитического приближенного решения сумма с 9-го по 12-е слагаемое не превышает требуемой точности. Следовательно, можно утверждать, что точность полученного приближенного решения $y_8(x)$ не превышает $\varepsilon=6\cdot10^{-6}$.

Значения оценки аналитического приближенного решения в случае точных начальных условий

x	$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$y''(x_0)$	$y_8(x)$	Δ_1	Δ_2
1,5	0,5	0,5	1	1,041242	0,000122	0,000006

Априорная оценка позволяет значительно увеличивать точность получаемого приближенного решения. При осуществлении аналитического продолжения решения задачи (1), (2) возникает задача исследования влияния возмущения начальных данных задачи Коши

$$y''' = y^2 + r(x); \tag{8}$$

$$y(x_0) = \tilde{y}_0, \quad y'(x_0) = \tilde{y}_1, \quad y''(x_0) = \tilde{y}_2 \tag{9}$$

на структуру аналитического приближенного решения (7), которое принимает вид

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_0^N \tilde{C}_n (x - x_0)^n, \tag{10}$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов. Следующая теорема позволяет получить оценку погрешности аналитического приближенного решения (10).

Теорема 3. *Пусть*

1) выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1;

2) $\Delta M \le 1$.

Тогда для аналитического приближенного решения (10) задачи (8), (9) в области $|x - x_0| < \rho_3$ *справедлива оценка* $\Delta\tilde{y}_N(x) \le \Delta_0 + \Delta_1$, *где*

$$\Delta_0 \le \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)}{1 - (M + \Delta M + 1)|x - x_0|^3}(1 + |x - x_0| + |x - x_0|^2),$$

для $N + 1 = 3n$ *верна оценка*

$$\Delta_1 \le \frac{(M+1)^{\frac{N+4}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(1 - (M+1)|x - x_0|^3)(N+1)} \left(\frac{1}{(N-1)N} + \frac{|x - x_0|}{N(N+2)} + \frac{|x - x_0|^2}{(N+2)(N+3)} \right),$$

для $N + 1 = 3n + 1$ *— оценка*

$$\Delta_1 \le \frac{(M+1)^{\frac{N+3}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(1 - (M+1)|x - x_0|^3)(N+1)} \left(\frac{1}{(N-1)N} + \frac{|x - x_0|}{N(N+2)} + \frac{(M+1)|x - x_0|^2}{(N+2)(N+3)} \right)$$

и для $N + 1 = 3n + 2$ *— оценка*

$$\Delta_1 \le \frac{(M+1)^{\frac{N+2}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(1 - (M+1)|x - x_0|^3)(N+1)} \left(\frac{1}{(N-1)N} + \frac{(M+1)|x - x_0|}{N(N+2)} + \frac{(M+1)|x - x_0|^2}{(N+2)(N+3)} \right).$$

При этом

$$M = \max\left\{|\,\tilde{y}_0\,|,\,|\,\tilde{y}_1\,|,\,|\,\tilde{y}_2\,|,\ \sup_n\left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right|\right\};$$

$$\Delta M = \max\left\{\Delta\tilde{y}_0, \Delta\tilde{y}_1, \Delta\tilde{y}_2\right\}; \quad \rho_3 = \min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{\sqrt[3]{M+\Delta M+1}}\right\}.$$

◄ По определению

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = |\,y(x)-\tilde{y}_N(x)\,| \le |\,y(x)-\tilde{y}(x)\,| + |\,\tilde{y}(x)-\tilde{y}_N(x)\,| =$$

$$= \left|\sum_0^\infty C_n(x-x_0)^n - \sum_0^\infty \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| + \left|\sum_0^\infty \tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_0^N \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| \le$$

$$\le \sum_0^\infty \Delta\tilde{C}_n\,|\,x-x_0\,|^n + \sum_{N+1}^\infty |\,\tilde{C}_n\,\|\,x-x_0\,|^n = \Delta_0+\Delta_1,$$

где $\Delta\tilde{C}_n = |\,C_n-\tilde{C}_n\,|$. С учетом оценок коэффициентов C_n в (6) получаем гипотезу для оценок $\Delta\tilde{C}_n$:

$$\Delta\tilde{C}_{3n} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n+1}}{3n(3n-1)(3n-2)}; \quad \Delta\tilde{C}_{3n+1} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n+1}}{(3n-1)3n(3n+1)};$$
$$\Delta\tilde{C}_{3n+2} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n+1}}{3n(3n+1)(3n+2)}. \tag{11}$$

Покажем справедливость оценки $\Delta\tilde{C}_{3n}$. С учетом рекуррентного соотношения (5) имеем

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3} = |\,C_{3n+3}-\tilde{C}_{3n+3}\,| = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\,|\,C^*_{3n}+A_{3n}-\tilde{C}^*_{3n}-A_{3n}\,| =$$

$$= \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\left|\sum_{i=0}^\infty\left(\tilde{C}_{3n-3i}+\Delta\tilde{C}_{3n-3i}\right)\left(\tilde{C}_{3i}+\Delta\tilde{C}_{3i}\right) - \sum_{i=0}^\infty \tilde{C}_{3n-3i}\,\tilde{C}_{3i}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\sum_{i=0}^\infty\left(\frac{(M+1)^{n-i+1}\Delta M(M+\Delta M+1)^{i+1}}{(3n-3i)(3n-3i-1)(3n-3i-2)(3i(3i-1)(3i-2))^*}+\right.$$

$$+\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n-i+1}(M+1)^{i+1}}{(3n-3i)(3n-3i-1)(3n-3i-2)(3i(3i-1)(3i-2))^*}+$$

$$\left.+\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n-i+1}}{(3n-3i)(3n-3i-1)(3n-3i-2)}\,\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{i+1}}{(3i(3i-1)(3i-2))^*}\right) \le$$

$$\le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n+2}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},$$

при этом

$$(3i(3i-1)(3i-2))^* = \begin{cases} 1, & i=0; \\ 3i(3i-1)(3i-2), & i=1,2,... \end{cases}$$

Аналогичным образом убеждаемся в оценках $\Delta\tilde{C}_{3n+1}$ и $\Delta\tilde{C}_{3n+2}$. Следовательно,

$$\Delta_0 = \sum_0^\infty \Delta\tilde{C}_n \,|\, x-x_0 \,|^n =$$

$$= \sum_0^\infty \Delta\tilde{C}_{3n} \,|\, x-x_0 \,|^{3n} + \sum_0^\infty \Delta\tilde{C}_{3n+1} \,|\, x-x_0 \,|^{3n+1} + \sum_0^\infty \Delta\tilde{C}_{3n+2} \,|\, x-x_0 \,|^{3n+2}.$$

С учетом оценок (11) окончательно для Δ_0 получаем

$$\Delta_0 \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)}{1-(M+\Delta M+1)\,|\, x-x_0 \,|^3}\left(1+|\, x-x_0 \,|+|\, x-x_0 \,|^2\right).$$

Оценка для Δ_1 следует из теоремы 2.

Полученные оценки приближенного решения справедливы в области $|\, x-x_0 \,| < \rho_3$, где $\rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{M+\Delta M+1}}\right\}$. ►

Анализ структуры выражений для величин Δ_0 и Δ_1 позволяет сделать следующие выводы: выражение для Δ_0 явно зависит от возмущения начальных данных, а выражение для Δ_1 напрямую связано со структурой аналитического приближенного решения. Варьируя определенным образом эти параметры, можно получать значения приближенного решения с заданной точностью.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши с возмущенными начальными условиями

$$y''' = y^2(x) + x, \quad \tilde{y}(1,5) = 1,04124, \quad \tilde{y}'(1,5) = 1,75936, \quad \tilde{y}''(1,5) = 3,14496;$$

$$\Delta M = 6\cdot 10^{-5}, \quad M = 3,14496, \quad \rho_3 = 0,652745.$$

Значения оценки аналитического приближенного решения в случае возмущенных начальных условий приведены ниже, где Δ_1, Δ_2 — априорная погрешность, полученная по теореме 3, и апостериорная погрешность. Для $\varepsilon = 0,0065$ необходима структура аналитического приближенного решения с $N = 26$. Сумма слагаемых с 9-го по 26-е не превышает требуемой точности. Следовательно, $\tilde{y}_8(x)$ позволяет получать значение приближенного решения с точностью, не превышающей $\varepsilon = 0,0065$.

Значения оценки аналитического приближенного решения в случае возмущенных начальных условий

x	$y(x_1)$	$y'(x_1)$	$y''(x_1)$	$\tilde{y}_8(x)$	Δ_1	Δ_2
2,1	1,04124	1,75936	3,14496	3,38789	0,09005	0,0065

Заключение. Результаты приведенного исследования позволяют осуществлять аналитическое продолжение приближенного решения с заданной точностью за счет выбора возмущения начальных условий и структуры аналитического приближенного решения. При этом с учетом апостериорной погрешности можно существенно уточнить априорную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalman R.* Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.

2. *Горин В.А., Конаков А.П., Попов Н.С.* Исследование работы дозатора кормов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. 1981. № 1. С. 24–26.

3. *Airault H.* Rational solutions of Painlevé equations // Studies in Applied Mathematics. 1979. Vol. 61. Iss. 1. P. 31–53. DOI: 10.1002/sapm197961131

4. *Самодуров А.А., Чудновский В.М.* Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Доклады АН БССР. 1985. Т. 29. № 1. С. 9–10.

5. *Hill J.M.* Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. Iss. 2. P. 93–104. DOI: 10.1016/0020-7683(77)90125-1

6. *Ockendon J.R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems. New York, 1978. P. 129–145.

7. *Axford R.A.* The exact solution of singular arc problems in rector core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. P. 1–14.

8. *Hill J.M.* Abel's differential equation // J. Math. Scientist. 1982. Vol. 7. No. 2. P. 115–125.

9. *Kovalchuk O.A.* Simulation of the state of the rod elements of the building construction // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. P. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120

10. *Ковальчук О.А.* Устойчивость стержневых элементов строительных конструкций // ПГС. 2014. № 11. С. 60–62.

11. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

12. *Орлов В.Н.* Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 4. С. 23–32.

13. *Орлов В.Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. 2009. Т. 5. № 10. С. 192–195.

14. *Редкозубов С.А., Орлов В.Н.* Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. Т. 4. № 14. С. 12–14.

15. *Орлов В.Н.* Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник ЧГПУ им. И.Н. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.

16. *Орлов В.Н., Гузь М.П.* Связь нелинейного дифференциального уравнения с наличием и характером подвижных особых точек // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных

технологий. Сб. статей по мат. междунар. науч.-практ. конф. Ч. 2. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева, 2013. С. 30–35.

17. *Пчелова А.З., Коллэ К.В.* Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Мат. Всерос. науч. школы-конф. «Механика предельного состояния и смежные вопросы». Ч. 2. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева, 2015. С. 221–226.

Орлов Виктор Николаевич — д-р физ.-мат. наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26).

Ковальчук Олег Александрович — канд. техн. наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26).

Линник Елена Петровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Российская Федерация, Республика Крым, 295007, Симферополь, пр-т академика Вернадского, д. 4).

Линник Иван Иванович — канд. техн. наук, доцент, Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Российская Федерация, Республика Крым, 295007, Симферополь, пр-т академика Вернадского, д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Орлов В.Н., Ковальчук О.А., Линник Е.П., Линник И.И. Исследование одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 4. С. 24–35.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35

RESEARCH INTO A CLASS OF THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE DOMAIN OF ANALYTICITY

V.N. Orlov[1] orlowvn@rambler.ru
O.A. Kovalchuk[1]
E.P. Linnik[2] aplinnik@mail.ru
I.I. Linnik[2]

[1] Moscow State (National Research) University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation
[2] V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Republic of Crimea, Russian Federation

Abstract

We consider the class of ordinary third-order nonlinear differential equations with a polynomial right-hand side of the second degree, which has movable singular points of algebraic type and is in general unsolvable in quadratures. The existing classical theory, in particular the Cauchy theorem of the existence of a solution to a differential equation, in

Keywords

Nonlinear differential equation, existence theorem, analytical approximate solution, movable singular point, a posteriori error estimation

this case is practically inapplicable. To solve this category of equations, one of the authors has developed an analytical approximate method consisting of six mathematical problems. The paper presents a study of the analytical approximate solution in the domain of analyticity, including the solution existence theorem proof, the making of an analytical approximate solution, and the investigation of the effect of initial data perturbation on the analytical approximate solution. The existence theorem proof is based on the majorant method in a new version, which makes it possible to carry out the planned investigations. A computational experiment with the use of a posteriori error estimation is presented, which makes it possible to significantly improve the a priori error estimation obtained

Received 28.09.2017

REFERENCES

[1] Kalman R. Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.

[2] Gorin V.A., Konakov A.P., Popov N.S. Research on work of feed meter. *Mekhanizatsiya i elektrifikatsiya sel'skogo khozyaystva*, 1981, no. 1, pp. 24–26 (in Russ.).

[3] Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics*, 1979, vol. 61, iss. 1, pp. 31–53. DOI: 10.1002/sapm197961131

[4] Samodurov A.A., Chudnovskiy V.M. Simple method for determination time delay of superradiant boson avalanche. *Doklady AN BSSR*, 1985, vol. 29, no. 1, pp. 9–10 (in Russ.).

[5] Hill J.M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings. *International Journal of Solids and Structures*, 1977, vol. 13, iss. 2, pp. 93–104.
DOI: 10.1016/0020-7683(77)90125-1

[6] Ockendon J.R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. *Proc. Symp. Moving Boundary Problems*. New York, 1978, pp. 129–145.

[7] Axford R.A. The exact solution of singular arc problems in rector core optimization. *Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp*. Tennessee, 1974, pp. 1–14.

[8] Hill J.M. Abel's differential equation. *J. Math. Scientist*., 1982, vol. 7, no. 2, pp. 115–125.

[9] Kovalchuk O.A. Simulation of the state of the rod elements of the building construction. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 153, pp. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120

[10] Koval'chuk O.A. Stability of rod elements of building structures. *PGS* [Industrial and Civil Engineering], 2014, no. 11, pp. 60–62 (in Russ.).

[11] Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differentsial'nykh uravneniy Penleve i Abelya [Approximate method for solving first and second Abel and Painlevé differential equations]. Moscow, MPGU Publ., 2013. 174 p.

[12] Orlov V.N. Study of approximate solution of Abel's differential equation in the vicinity of movable singularity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 4, pp. 23–32 (in Russ.).

[13] Orlov V.N. The exact application area borders of Abel differential equation approximate solution in the area of the movable special point approximate meaning. *Vestnik Voronezhskogo gos. tekhn. un-ta*, 2009, vol. 5, no. 10, pp. 192–195 (in Russ.).

[14] Redkozubov S.A., Orlov V.N. Exact criteria of movable singularity existence for Abel differential equation. *Izvestiya instituta inzhenernoy fiziki*, 2009, vol. 4, no. 14, pp. 12–14 (in Russ.).

[15] Orlov V.N. Exact boundaries of approximate solution of Abel differential equation in the vicinity of movable singularity approximate value in complex domain. *Vestnik ChGPU im. I.N. Yakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State], 2010, no. 2 (8), pp. 399–405 (in Russ.).

[16] Orlov V.N., Guz' M.P. [Relation between nonlinear differential equation and existence and properties of movable singularities]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovaniya i informatsionnykh tekhnologiy. Sb. statey po mat. mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Ch. 2* [Fundamental and applied problems of deformable solid mechanics, mathematical simulation and information technologies. Proc. Int. Sci.-Pract. Conf. P. 2]. Cheboksary, Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Publ., 2013. Pp. 30–35 (in Russ.).

[17] Pchelova A.Z., Kolle K.V. [Theorem of the solution existence for one nonlinear differential third order equation with polynomial second order right-hand member in the vicinity of movable singularity]. *Mat. Vseros. nauch. shkoly-konf. "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy". Ch. 2* [Proc. Russ. Sci.-Pract. School-Conf. "Limit-state mechanics and related issues"]. Cheboksary, Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Publ., 2015. Pp. 221–226 (in Russ.).

Orlov V.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Moscow State (National Research) University of Civil Engineering (Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337 Russian Federation).

Kovalchuk O.A. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Moscow State (National Research) University of Civil Engineering (Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337 Russian Federation).

Linnik E.P. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, V.I. Vernadsky Crimean Federal University (Academician Vernadskogo prospekt 4, Simferopol, Republic of Crimea, 295007 Russian Federation).

Linnik I.I. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, V.I. Vernadsky Crimean Federal University (Academician Vernadskogo prospekt 4, Simferopol, Republic of Crimea, 295007 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Orlov V.N., Kovalchuk O.A., Linnik E.P., Linnik I.I. Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 4, pp. 24–35 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35