УДК 519.718 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-37-44

НИЖНЯЯ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ГРАНИЦА СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ С ВОССТАНАВЛИВАЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

И.В. Павлов ipavlov@bmstu.ru
С.В. Разгуляев sergach_91@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача доверительного оценивания одного из основных показателей надежности восстанавливаемых систем — среднего времени безотказной работы системы (в стационарном режиме) для общей модели системы с нагруженным резервированием и независимым восстановлением элементов в различных подсистемах. Предложен метод построения приближенной нижней доверительной границы (по результатам испытаний элементов) для показателя надежности системы в естественной с позиции приложений асимптотике для случая высокой надежности («быстрого восстановления») элементов системы

Ключевые слова

Надежность, система, коэффициент готовности, среднее время безотказной работы, доверительные границы, резервирование, восстановление

Поступила в редакцию 19.10.2017

Введение. Оценка и прогноз с заданным уровнем достоверности показателей надежности сложных систем является одной из актуальных проблем математической теории надежности. При этом оценка надежности системы проводится в ситуации, когда точные значения параметров надежности элементов системы неизвестны, а имеется лишь статистическая информация по результатам испытаний ее отдельных элементов или подсистем. В большинстве существующих в настоящее время работ указанная проблема рассмотрена главным образом для систем без восстановления (например, [1–7] и др.). Здесь предложен метод построения нижней доверительной границы с заданным уровнем достоверности (коэффициентом доверия) для одного из основных показателей надежности восстанавливаемых систем — среднего времени безотказной работы системы (в стационарном режиме). Рассмотрим систему, состоящую из m последовательно соединенных подсистем, i-я подсистема включает в себя n_i элементов, работающих в режиме нагруженного резервирования. Предполагается, что время безотказной работы элемента i-го типа (i-й подсистемы) ξ_i имеет экспоненциальное распределение с функцией надежности $P_i(t)=\exp(-\lambda_i t)$, где $\lambda_i>0$ — параметр, точное значение которого неизвестно, $i=1,\ldots,m.$ Отказавший элемент i-й подсистемы восстанавливается (независимо от состояния других элементов) в течение случайного времени η_i с функцией распределения $G_i(t)=1-\exp(-t/\nu_i)$, где $\nu_i=M\eta_i$ — среднее время восстановления, $i=1,\ldots,m.$ Далее предположим, что среднее время восстановления мало по сравнению со средним временем работы элементов ($\lambda_i \nu_i \ll 1,\ \ i = 1, \ldots, m$) и, кроме того, параметры восстановления ν_i известны. Это является естественным допущением для современных высоконадежных систем. Процессы отказов и восстановления различных элементов независимы.

Определим основные показатели надежности — коэффициент готовности и среднее время безотказной работы для одной отдельно взятой i-й подсистемы при заданных параметрах ее элементов. Процесс функционирования i-й подсистемы представляет собой процесс «гибели и размножения» $K_i(t) \in (0, 1, \ldots, n_i)$, где $K_i = K_i(t)$ — число элементов i-го типа (i-й подсистемы), находящихся в момент времени $t > 0$ в состоянии отказа, $i = 1, \ldots, m$.

Вероятности различных состояний (в стационарном режиме) i-й подсистемы определяются известными выражениями (например, [1, гл. 6] и др.)

$$p_{ik}(\lambda_i) = \frac{C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)}{\sum\limits_{k=0}^{n_i} C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)^k},\ \ k = 1, \ldots, n_i,\ \ i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Множество всех состояний i-й подсистемы $(0, 1, \ldots, n_i)$ подразделяется на подмножество исправных состояний $(0, 1, \ldots, n_i - 1)$ и состояние $k = n_i$, в котором система является неисправной, откуда с учетом (1) следует, что коэффициент готовности (вероятность исправного состояния) i-й подсистемы имеет вид

$$K_i(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n_i - 1} p_{ik}(\lambda_i) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n_i - 1} C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n_i} C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)^k},\ \ i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

В предположении, что процессы отказов и восстановления элементов в различных подсистемах независимы, коэффициент готовности системы в целом определяется через коэффициенты готовности отдельных подсистем

$$K_C = K_C(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} K_i(\lambda_i),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор параметров надежности элементов различных подсистем.

Пусть $L_i = L_i(\lambda_i)$ — среднее время безотказной работы, V_i — среднее время восстановления i-й подсистемы. Коэффициент готовности i-й подсистемы

$$K_i(\lambda_i) = \frac{L_i}{L_i + V_i},\ \ i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Время восстановления i-й подсистемы является временем пребывания i-й подсистемы в состоянии n_i, т. е. $V_i = \nu_i / n_i$, $i = 1, \ldots, m$. Из выражений (2), (3) после простых преобразований следует, что среднее время безотказной работы i-й подсистемы составляет

$$L_i(\lambda_i) = \nu_i n_i^{-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)^{k-n_i}, \ i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Предположим, что отказы и восстановления элементов в различных подсистемах независимы между собой, тогда среднее время безотказной работы системы имеет вид [1]

$$L_C = L_C(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{L_i(\lambda_i)} \right)^{-1}.$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор параметров надежности элементов различных подсистем. В соответствии с (4) получим

$$L_C(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}, \tag{5}$$

где $f(\lambda) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — функция,

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda_i), \tag{6}$$

$$f_i(\lambda_i) = \frac{n_i \nu_i^{n_i-1} \lambda_i^{n_i}}{\sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i}^k (\lambda_i \nu_i)^k}. \tag{7}$$

Таким образом, в рассматриваемой довольно общей модели известна аналитическая зависимость (5)–(7) показателя надежности — среднего времени безотказной работы системы $L_C = L_C(\lambda)$ — от вектора параметров надежности элементов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Требуется построить нижнюю доверительную границу для показателя надежности системы L_C по результатам испытаний ее элементов, проводившихся по тем или иным планам. Предположим, что испытания элементов проводились по стандартным планам типа $[N_i$ в $T_i]$ (в обозначениях, взятых из работы [1]), т. е. в течение времени T_i было испытано (с восстановлением отказавших элементов) N_i элементов i-го типа, в результате чего наблюдалось отказов d_i, $i = 1, \ldots, m$. Требуется построить нижнюю доверительную границу для функции $L_C(\lambda) = L_C(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ на основе вектора результатов испытаний $d = (d_1, \ldots, d_m)$.

Построение нижней доверительной границы для среднего времени безотказной работы системы L_C. Обозначим множество всех возможных значений вектора параметров λ через $\Theta = \{\lambda : \lambda_i > 0, \ i = 1, \ldots, m\}$, множество результатов наблюдений $d = (d_1, \ldots, d_m)$ — $W = \{d : d_i = 1, 2, \ldots; \ i = 1, \ldots, m\}$, вероятностное распределение d при данном $\lambda \in \Theta$ — $P_\lambda\{d\}$. Наблюдаемое при испытаниях число отказов d_i имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda_i = N_i T_i \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$ [1, гл. 4]. Рассмотрим статистику $D = d_1 + \ldots + d_m$, которая также имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i = \sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i$. Обозначим через $\Delta_\gamma(D)$ стандартную верхнюю γ-доверительную границу для параметра пуассоновского закона распределения по результату наблюдения D [1]. Тогда в соответствии с определением $\Delta_\gamma(D)$ имеет место неравенство

$$P_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D) \right\} \ge \gamma, \quad \lambda \in \Theta. \tag{8}$$

Учитывая неравенство (8), набор подмножеств

$$H(d) = \left\{ \lambda : \ \sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D), \ \ \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m \right\} \subset \Theta, \ \ d \in W,$$

образует систему γ-доверительных множеств для вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

В соответствии с общим методом доверительных множеств [1, 2] верхняя γ-доверительная граница для функции $f(\lambda)$ находится как

$$\overline{f} = \overline{f}(d) = \max \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda_i), \tag{9}$$

где максимум берется по доверительному множеству $H_d \subset \Theta$, т. е. при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D); \\ &\lambda_i \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{10}$$

После нахождения максимума (9) нижняя доверительная граница для среднего времени безотказной работы системы L_C в соответствии с (5) определяется по формуле $\underline{L}_C = 1/\overline{f}$.

Приближенное решение для случая высокой надежности («быстрого восстановления») элементов системы. Точное аналитическое решение задачи на нахождение максимума в (9) при ограничениях (10) довольно сложное. Рассмотрим приближенное асимптотическое решение для случая высокой надежности, или «быстрого восстановления» элементов системы при $\lambda_i \nu_i \ll 1$, $i = 1, \ldots, m$. Из формул (5)–(7) следует, что при $\nu_i \lambda_i \to 0$, $i = 1, \ldots, m$:

$$f_i(\lambda_i) = n_i \nu_i^{n_i - 1} \lambda_i^{n_i} \left[1 + o(1) \right],$$

откуда приближенные при $\lambda_i \nu_i \ll 1$, $i = 1, \ldots, m$, выражения для функции $f(\lambda)$ и верхней доверительной границы $\overline{f}$ имеют вид

$$f(\lambda) \cong \sum_{i=1}^{m} n_i v_i^{n_i-1} \lambda_i^{n_i};$$
$$\overline{f} \cong \max \sum_{i=1}^{m} n_i v_i^{n_i-1} \lambda_i^{n_i}. \quad (11)$$

Здесь максимум находится по области (10). Функция в правой части (11) выпукла по вектору параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, откуда следует, что максимум в (11) достигается в одной из m «крайних» точек вида $(0, \ldots, 0, \tilde{\lambda}_i, 0, \ldots, 0)$, где $\tilde{\lambda}_i = \Delta_\gamma(D) / (N_i T_i)$, $i = 1, \ldots, m.$ Верхняя доверительная граница

$$\overline{f} \cong \max_i \left(n_i v_i^{n_i-1} \left[\Delta_\gamma(D) / (N_i T_i) \right]^{n_i} \right), \quad (12)$$

где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, m.$ Нижняя γ-доверительная граница для среднего времени безотказной работы системы L_C определяется приближенным для случая высокой надежности («быстрого восстановления») выражением

$$\underline{L}_C \cong \min_i \left(\left[N_i T_i / \Delta_\gamma(D) \right]^{n_i} \Big/ \left(n_i v_i^{n_i-1} \right) \right). \quad (13)$$

Оценим точность построенной приближенной доверительной границы. Из выражений (5)–(7) находим при $(v_i \lambda_i) \to 0$, $i = 1, \ldots, m,$

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} n_i v_i^{n_i-1} \lambda_i^{n_i} \left[1 - n_i (v_i \lambda_i) + o(v_i \lambda_i) \right].$$

Обозначим через

$$\overline{f}_1 = \max \sum_{i=1}^{m} n_i v_i^{n_i-1} \lambda_i^{n_i} \left[1 - n_i (v_i \lambda_i) \right] \quad (14)$$

уточненную верхнюю доверительную границу для $f(\lambda)$, использующую в (14) дополнительные члены разложения функций $f_i(\lambda_i)$ в ряд по степеням $(v_i \lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m.$ Для построенной в (11), (12) приближенной доверительной границы $\overline{f}$ и доверительной границы $\overline{f}_1$ выполняются неравенства

$$\overline{f} - \delta \le \overline{f}_1 \le \overline{f}, \quad (15)$$

где

$$\delta = \max \sum_{i=1}^{m} n_i^2 v_i^{n_i} \lambda_i^{n_i+1}. \quad (16)$$

Здесь максимум находится по той же области, заданной неравенствами (10). Функция в правой части (16) выпукла по вектору параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, откуда следует оценка точности построенной приближенной доверительной границы $\delta = \max_i \left(n_i^2 v_i^{n_i} \left[\Delta_\gamma(D) / (N_i T_i) \right]^{n_i+1} \right)$.

Из приведенного выражения следует, что точность построенной доверительной границы улучшается при увеличении кратности резервирования в системе. В качестве иллюстрации рассмотрим численный пример на доверительное оценивание среднего времени безотказной работы системы.

Пример. Пусть система состоит из m = 9 подсистем. Значения числа резервных элементов n_i в различных подсистемах, среднего времени восстановления v_i и показателей N_i, T_i, d_i, $i = 1, \ldots, m$, полученных в результате испытаний элементов различных типов, приведены в таблице.

Значения числа резервных элементов n_i в различных подсистемах, среднего времени восстановления v_i и показателей N_i, T_i, d_i, $i = 1, \ldots, m$, полученных в результате испытаний элементов различных типов

Показатель	i								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	3	2	3	2	1	2	3	3
v_i	4	2,3	1,5	3	1,3	1,1	1,2	1,6	1,2
N_i	8	6	7	5	6	9	7	4	5
T_i	165	120	115	105	115	155	120	105	75
d_i	0	1	0	0	0	0	0	1	0

В этом случае построенная выше приближенная нижняя γ-доверительная граница (при γ = 0,9) для среднего времени безотказной работы системы $\underline{L}_C$ = = 248. Тогда в (16) δ = 0,00006 (Соответственно неравенства (15), позволяющие оценить точность построенной доверительной границы, имеют вид 0,00399 = $= \overline{f} - \delta \leq \overline{f}_1 \leq \overline{f}$ = 0,00403.)

Согласно приведенным выражениям, нижняя оценка среднего времени безотказной работы системы существенно зависит (возрастает) от увеличения кратности резервирования в системе.

Заключение. Построена приближенная нижняя доверительная граница среднего времени безотказной работы для довольно общей модели системы с нагруженным резервированием и независимым восстановлением элементов в различных подсистемах. Решение такой задачи получено в естественной с прикладной точки зрения асимптотике — для случая высокой надежности (или «быстрого восстановления») элементов системы в предположении, что среднее время восстановления элементов мало по сравнению со средним временем безотказной работы. Определены оценки точности для построенной приближенной доверительной границы, которая улучшается при увеличении кратности резервирования в системе. Существенный интерес с позиции приложений представляет обобщение полученных результатов на более общие модели сложных систем, в том числе на системы с ненагруженным резервированием и зависимым восстановлением, а также системы с более сложной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Либроком, 2013. 584 с.

2. *Беляев Ю.К.* Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров // Докл. АН СССР. 1967. Т. 169. № 4. С. 755–758.

3. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность; пер с англ. М.: Наука, 1984. 328 с.

4. *Павлов И.В.* Доверительные границы для показателей надежности системы с возрастающей функцией интенсивности отказов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 70–75.

5. *Павлов И.В.* Оценка надежности системы с резервированием по результатам испытаний ее элементов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 3. С. 149–158.

6. *Сидняев Н.И.* Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 4. С. 24–31.

7. *Павлов И.В., Разгуляев С.В.* Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365

Павлов Игорь Валерианович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Разгуляев Сергей Васильевич — аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Павлов И.В., Разгуляев С.В. Нижняя доверительная граница среднего времени безотказной работы системы с восстанавливаемыми элементами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 5. С. 37–44. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-37-44

LOWER CONFIDENCE LIMIT FOR MEAN TIME BETWEEN FAILURES IN A SYSTEM FEATURING REPAIRABLE COMPONENTS

I.V. Pavlov ipavlov@bmstu.ru
S.V. Razgulyaev sergach_91@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers the problem of confidence estimation for one of the main reliability indices of repairable systems, that is, steady-state mean time between failures, in a general model of a system characterised by hot redundancy and separate component maintenance in various subsystems. We present a method of plotting an approximate lower confidence limit (based on component testing results) for this reliability index assuming an asymptotic case common in engineering practice, when the system components feature high reliability ("fast repair")

Keywords

Reliability, system, availability, mean time between failures, confidence limits, redundancy, repair

Received 19.10.2017

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyayev Yu.K., Solovyev A.D. Matematicheskiye metody v teorii nadezhnosti [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow, Librokom Publ., 2013. 584 p.

[2] Belyayev Yu.K. Confidence intervals for functions of several unknown parameters. *Dokl. AN SSSR*, 1967, vol. 169, no. 4, pp. 755–758 (in Russ.).

[3] Barlow R.E., Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing. Probability models. Holt, Rinehart and Winston, 1975. 290 p.

[4] Pavlov I.V. Confidence limits for system reliability indices with increasing function of failure intensity. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, iss. 2, pp. 149–153. DOI: 10.3103/S1052618817020133

[5] Pavlov I.V. Estimating reliability of redundant system from the results of testing its elements. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, iss. 3, pp. 507–514.
DOI: 10.1134/S0005117917030109

[6] Sidnyayev N.I. Mathematical modelling of reliability assessment of complex technical systems. *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability], 2003, no. 4, pp. 24–31 (in Russ.).

[7] Pavlov I.V., Razgulyayev S.V. Reliability asymptotic estimates of a system with redundant heterogeneous elements. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2015, no. 2 (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365

Pavlov I.V. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Razgulyaev S.V. — post-graduate student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Lower Confidence Limit for Mean Time between Failures in a System Featuring Repairable Components. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 5, pp. 37–44 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-37-44