УДК 519.6:519.63 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-65-82

КРИТЕРИЙ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

М.М. Рамазанов[1, 2] mukamay-ipg@mail.ru
Е.Б. Савенков[1] e.savenkov@googlemail.com

[1] **ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация**
[2] **Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, Республика Дагестан, Российская Федерация**

Аннотация

Центральным моментом классической теории развития трещин, основанной на сформулированной А. Гриффитсом и Г. Ирвином концепции хрупкого и квазихрупкого разрушения, является критерий развития трещин. Этот критерий может быть сформулирован в разной форме. В зависимости от конкретной задачи, каждая из этих форм может быть более или менее удобной для исследования процесса роста трещин. Основные результаты, полученные в рамках этой теории, относятся к деформируемым телам, подчиняющимся законам линейной упругости. В связи с многочисленными практическими приложениями, актуально обобщить указанные формулы на пороупругие среды. Предложено обобщение на случай деформируемых пороупругих сред Био результатов, полученных ранее для чисто упругих сред. Показано, что поле давления в окрестности кончика трещины, как и поле напряжений, в общем случае испытывает сингулярное поведение. Это позволило получить критерий развития трещин в пороупругой среде, учитывающий влияние поля давления жидкости в порах

Ключевые слова

Механика разрушения, трещина, J-интеграл, пороупругость, уравнения Био

Поступила в редакцию 12.09.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-00021)

Введение. При достаточно больших напряжениях, возникающих вследствие приложения больших нагрузок, все твердые тела разрушаются. Разрушение может иметь различный характер: хрупкое; квазихрупкое; вязкое; упруго-пластическое и т. д. Тело называется хрупким, если вплоть до разрушения его деформации и напряжения подчиняются законам линейной теории упругости. При хрупком разрушении в телах формируются и распространяются макроскопические трещины. При квазихрупком разрушении в приповерхностном слое малой толщины на берегах трещин возникают пластические деформации.

Теория развития трещины в упругой среде в рамках подхода Гриффитса и Ирвина [1–3] достаточно хорошо разработана. В соответствии с этой теорией для развития трещины в упругом теле необходимо, чтобы уменьшение энергии деформации на единицу площади вновь образовавшейся поверхности трещины достигало некоторого критического значения. Таким образом, при развитии трещины в точках ее роста происходит отток упругой энергии. Основной задачей механики хрупкого разрушения является определение указанного потока энергии, определяющего условие развития трещины. Эта величина может иметь различную форму. Одна из них связана с использованием концепции *J*-интеграла, который характеризует интенсивность высвобождения энергии при развитии трещины в твердых деформируемых средах. Впервые выражение для скорости высвобождения упругой энергии при росте трещины было получено Г. Черепановым [4] и названо Г-интегралом. Дж. Райс (J. Rice) [5] при рассмотрении деформаций в окрестности кончика трещины в нелинейно-упругом теле ввел аналогичное понятие и назвал его *J*-интегралом. Фактически оно совпадает с введенным ранее Г-интегралом Черепанова.

В настоящее время *J*-интеграл является широко известным инструментом, используемым для анализа распространения трещин в деформируемых твердых средах. С его помощью могут быть вычислены коэффициенты интенсивности напряжений на фронте трещины [6]. В свою очередь, значения последних могут быть использованы в качестве критериев развития трещины, а также для определения направления ее эволюции.

В отличие от чисто упругих тел существенно меньше теория развития трещин разработана для насыщенной жидкостью пороупругой среды. Настоящая работа нацелена на частичное восполнение этого пробела.

Рассматриваемый класс задач имеет множество важных приложений. В частности, теория пороупругости применяется для анализа ряда задач разработки нефтегазовых месторождений. В свою очередь, теория развития трещин в пороупругих средах представляет собой основной теоретический инструмент анализа процедуры гидравлического разрыва пласта, являющийся одним из распространенных методов увеличения нефтеотдачи.

Формула для потока энергии, связанного с развитием трещины в пороупругой среде. Рассмотрим двуфазную среду, в которой одна фаза является твердой деформируемой пористой проницаемой матрицей (скелетом), а вторая — жидкой (подвижной) средой. Первую среду обозначим индексом «*s*» (*solid*), вторую — индексом «*f*» (*fluid*).

Формула для оттока энергии в точках роста трещин в упругой среде хорошо известна. Для вывода этой формулы используют различные подходы [7, 8]. Указанная формула обобщена на случай трещины в пороупругой среде, насыщенной жидкостью, при этом использован подход, изложенный в работе [7].

Рассмотрим неограниченную пороупругую среду. Пусть в среде имеется увеличивающаяся со временем t трещина со срединной поверхностью $\Sigma = \Sigma(t)$. Фронт трещины — (одномерный) край $\partial\Sigma$ этой поверхности.

В случае развития трещины как в чисто упругой, так и в пороупругой среде обобщенный закон сохранения энергии для произвольного объема V среды записывается в виде [7]:

$$dK + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dA^{(e)}_{d\Sigma}. \tag{1}$$

Здесь K — кинетическая энергия; U — внутренняя энергия; $dA^{(e)}$ — приток энергии за счет работы внешних объемных и поверхностных сил; $dQ^{(e)}$ — внешний приток теплоты.

Величина $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ представляет собой поток энергии в особых точках (фронте, в двумерном случае — кончике трещины), необходимый для развития трещины, т. е. движения указанных точек концентрации напряжений. Если трещина не перемещается или объем V не содержит точек фронта трещины, то указанная величина равна нулю. Выражение для этой величины в случае развития трещины в чисто упругой среде хорошо известно [7, 8].

Введем декартову ортогональную систему координат Ox_α, $\alpha = 1, 2, 3$ (здесь и далее нижними греческими индексами обозначим оси системы координат и соответствующие компоненты векторов и тензоров; по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Рассмотрим случай малых пространственных деформаций. Тогда эйлеровы и лагранжевы координаты точек скелета совпадают. Пусть $u_\alpha = u_\alpha(t, x_\beta)$ — компоненты поля перемещения точек среды.

Математическая модель пороупругой среды Био имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + m_s\left(f_\beta - \gamma_{s,\beta}\right) + m_f\left(f_\beta - \gamma_{f,\beta}\right) = 0;\ \varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2\left(\partial u_\alpha/\partial x_\beta + \partial u_\beta/\partial x_\alpha\right);\\
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;\\
\frac{de}{dt} + e\frac{\partial v_{s,\alpha}}{\partial x_\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(h_f w_\alpha + Q_\alpha\right) + \left(f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}\right) w_\alpha;\\
w_\alpha = k_p\left[-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho_f\left(f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}\right)\right],\ \ Q_\alpha = -k_T\frac{\partial T}{\partial x_\alpha},\ \ k_p = \frac{\rho_f k}{\mu}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + v_{s,\alpha}\,\partial/\partial x_\alpha$; $m_f = \rho_f\phi$ — содержание флюидов; $w_\alpha = \rho_f\phi\left(v_{f,\alpha} - v_{s,\alpha}\right)$ — компоненты вектора плотности потока массы жидкости; ρ_f — плотность жидкости; ϕ — пористость; $v_{f,\alpha}$, $v_{s,\alpha} = \partial u_\alpha/\partial t$ — компоненты скорости жидкости и скелета; $\sigma_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений Коши; f_β — компоненты вектора массовой плотности внешних сил; $\gamma_{s,\alpha} = \partial v_{s,\alpha}/\partial t$, $\gamma_{f,\alpha} = \partial v_{f,\alpha}/\partial t$ — ускорения скелета и жидкости; $m_s = \rho_s(1-\phi)$ — средняя плотность твердой фазы; $h_f = e_f + p/\rho_f$ — удельная массовая энтальпия жидкости, p — давление жидкости; $d_{\alpha\beta} = 1/2\left(\partial v_\beta/\partial x_\alpha + \partial v_\alpha/\partial x_\beta\right)$ — компоненты тензора скоростей деформаций; $e = (1-\phi)\rho_s e_s + \phi\rho_f e_f$ — объемная плотность внутренней энергии, e_f — удельная массовая энергия жидкости, e_s — удельная массовая энергия скелета; k — коэффициент проницаемости; μ — вязкость жидкости; Q_α — вектор потока теплоты; k_T — коэффициент теплопроводности; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора упругих деформаций.

Определяющие соотношения для скелета

$$\sigma_{\alpha\beta}-\sigma_{0,\alpha\beta}=C_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\varepsilon_{\gamma\delta}-\varepsilon_{0,\gamma\delta}-\alpha_{\gamma\delta}\left(T-T_0\right)\right]-b_{\alpha\beta}\left(p-p_0\right);$$
$$\phi-\phi_0=b_{\alpha\beta}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}-\varepsilon_{0,\alpha\beta}\right)+\frac{1}{N}\left(p-p_0\right)-\alpha_\phi\left(T-T_0\right); \qquad (3)$$
$$s_s-s_{s0}=C_{\alpha\beta\gamma\delta}\alpha_{\alpha\beta}\left(\varepsilon_{\gamma\delta}-\varepsilon_{0,\gamma\delta}\right)-\alpha_\phi\left(p-p_0\right)+C\frac{T-T_0}{T_0},$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты симметричного тензора упругих коэффициентов; C — удельная объемная теплоемкость скелета при постоянных $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и p; N, $b_{\alpha\beta}$ — параметры Био; α_ϕ — коэффициент температурного расширения скелета; $\alpha_{\gamma\delta}$ — компоненты тензора температурного расширения скелета.

Рассмотрим некоторую область V, содержащую фронт (кончик) трещины. Учитывая (2) и (3), запишем уравнение энергии (1) для выбранной области:

$$\int\limits_V A_m d\omega+\int\limits_{\partial V} A_e ds-\int\limits_{\partial V} Q_\alpha n_\alpha ds=\frac{d}{dt}\int\limits_V e d\omega+\frac{d}{dt}\int\limits_V K d\omega+\frac{d\Pi}{dt}, \qquad (4)$$

где A_m, A_e — работа, совершенная в единицу времени объемными силами, и поток энергии через границу ∂V области V; Q_α — поток теплоты; K — кинетическая энергия единицы массы; $d\Pi/dt$ — изменение энергии, связанное с увеличением площади поверхности трещины внутри объема V в единицу времени. Выражения для этих величин имеют вид

$$K=\frac{1}{2}\left[\rho_s\left(1-\phi\right)v_s^2+\rho_f\phi v_f^2\right];$$
$$A_m=\left[\rho_s\left(1-\phi\right)v_{s,\alpha}+\rho_f\phi v_{f,\alpha}\right]f_\alpha;\quad A_e=\left[\sigma_{\alpha\beta}n_\alpha v_{s,\beta}-\left(\frac{v_f^2}{2}+h_f\right)w_\alpha n_\alpha\right], \qquad (5)$$

где $v_f^2=v_{f,\alpha}v_{f,\alpha}$, $v_s^2=v_{s,\alpha}v_{s,\alpha}$ — квадрат нормы вектора скорости жидкости и скелета; n_α — компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности ∂V.

Пусть в некоторый момент времени t трещина представлена поверхностью Σ, а в момент времени $t+\Delta t$ — поверхностью $\Sigma+\Delta\Sigma$. Полагаем, что в оба момента времени область V содержит часть поверхности трещины вместе с краем. Площадь трещины также обозначим через Σ.

Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор перемещения точек скелета из некоторого начального состояния в состояние в момент времени t, а через $\mathbf{u}'$ — вектор перемещения из того же начального состояния в состояние в момент $t+\Delta t$.

Используя уравнение (2) для моментов времени t и $t+\Delta t$ для точек объемом V, можно записать соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sigma'_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta}\right)+F'_\alpha+F_\alpha=0;\quad F_\alpha=m_s\left(f_\beta-\gamma_{s,\beta}\right)+m_f\left(f_\beta-\gamma_{f,\beta}\right). \qquad (6)$$

Здесь без штрихов приведены величины в текущий момент времени t, а со штрихами — те же величины в момент времени $t + \Delta t$.

Умножим (6) на выражение $\Delta u_\alpha/2 = (u'_\alpha - u_\alpha)/2$. Суммируя и интегрируя сумму по всему объему тела, с учетом линеаризованной постановки задач получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma+\Delta\Sigma}(\sigma'_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta})(u'_\alpha-u_\alpha)n_\beta ds+\frac{1}{2}\int\limits_V(F'_\alpha+F_\alpha)(u'_\alpha-u_\alpha)d\omega=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_V\left(\frac{\partial\psi'_s}{\partial\varepsilon'_{\alpha\beta}}+\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\right)\frac{\partial}{\partial x_\beta}(u'_\alpha-u_\alpha)d\omega; \tag{7}$$
$$d\psi_s=\sigma_{\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta}+pd\phi-S_s dT,\quad \sigma_{\alpha\beta}=\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}},\quad p=\frac{\partial\psi_s}{\partial\phi},\ \ S_s=-\frac{\partial\psi_s}{\partial T},$$

где ψ_s — удельная свободная энергия Гельмгольца твердой фазы.

Вычислим подынтегральное выражение в правой части (7), для чего найдем разность

$$\psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta},\phi',T')-\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta},\phi,T)=$$
$$=\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\Delta\varepsilon_{ij}+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}\partial\phi}\Delta\phi+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}\partial T}\Delta T\right]\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}+$$
$$+\left[\frac{\partial\psi_s}{\partial\phi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\phi^2}\Delta\phi+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial T\partial\phi}\Delta T\right)\right]\Delta\phi+\left[\frac{\partial\psi_s}{\partial T}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_s}{\partial T^2}\Delta T+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial T\partial\phi}\Delta\phi\right)\right]\Delta T,$$

затем

$$\frac{\partial\psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta},\phi',T')}{\partial\varepsilon'_{\alpha\beta}}-\frac{\partial\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta},\phi,T)}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}=\Delta\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}=\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\Delta\varepsilon_{ij}+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}\partial\phi}\Delta\phi+\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}\partial T}\Delta T.$$

Из этих двух равенств имеем

$$\psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta},\phi',T')-\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta},\phi,T)=\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}+\Delta\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\right]\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}+p\Delta\phi-S_s\Delta T$$

или

$$\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}+\Delta\frac{\partial\psi_s}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\right]\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}=\psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta},\phi',T')-\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta},\phi,T)-p\Delta\phi+S_s\Delta T. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma}\sigma'_{\alpha\beta}(u'_\alpha-u_\alpha)n_\beta ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma}\sigma_{\alpha\beta}u'_\alpha n_\beta ds+\int\limits_\Sigma\sigma_{\alpha\beta}(u'_\alpha-u_\alpha)n_\beta d\omega+$$
$$+\int\limits_V F_\alpha(u'_\alpha-u_\alpha)d\omega=\int\limits_V(\Delta\psi_s-p\Delta\phi+S_s\Delta T)d\omega,$$

или

$$\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma'_{\alpha\beta}\left(u'_\alpha-u_\alpha\right)n_\beta ds+\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma_{\alpha\beta}u'_\alpha n_\beta ds+\int_\Sigma \sigma_{\alpha\beta}du_\alpha n_\beta ds+\int_V F_\alpha du_\alpha d\omega=$$
$$=\int_V\left(d\psi_s-pd\phi+S_s dT\right)d\omega. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь интегральный закон сохранения энергии

$$\int_V A_m d\omega+\int_{\partial V} A_e ds-\int_{\partial V} Q_\alpha n_\alpha ds=\frac{d}{dt}\int_V ed\omega+\frac{d}{dt}\int_V Kd\omega+\frac{d\Pi}{dt} \tag{10}$$

и локальное уравнение притока теплоты

$$\frac{de}{dt}+e\frac{\partial v_{s,\alpha}}{\partial x_\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(h_f w_\alpha+Q_\alpha\right)+\left(f_\alpha-\gamma_{f,\alpha}\right)w_\alpha. \tag{11}$$

Интегрируя (11) по объему и вычитая из (10), получаем уравнение, которое вместе с (9) дает следующую систему:

$$\int_V A_m d\omega+\int_{\partial V}\left[\sigma_{\alpha\beta}n_\alpha v_{s,\beta}-\frac{v_f^2}{2}w_\alpha n_\alpha\right]ds=$$
$$=\int_V\left[\sigma_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta}+\left(f_\alpha-\gamma_{f,\alpha}\right)w_\alpha\right]d\omega+\frac{d}{dt}\int_V Kd\omega+\frac{d\Pi}{dt}; \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma'_{\alpha\beta}\left(u'_\alpha-u_\alpha\right)n_\beta ds+\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma_{\alpha\beta}u'_\alpha n_\beta ds+\int_\Sigma \sigma_{\alpha\beta}du_\alpha n_\beta ds+\int_V F_\alpha du_\alpha d\omega=$$
$$=\int_V\left(d\psi_s-pd\phi+S_s dT\right)d\omega. \tag{13}$$

Умножая (12) на Δt и вычитая из полученного уравнения соотношение (13), окончательно имеем

$$\Delta\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma'_{\alpha\beta}\left(u'_\alpha-u_\alpha\right)n_\beta ds+\frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\sigma_{\alpha\beta}u'_\alpha n_\beta ds,$$

или

$$\frac{d\Pi}{d\Sigma}=\lim_{\Delta\Sigma\to 0}\frac{1}{2\Delta\Sigma}\left[\int_{\Delta\Sigma}\sigma'_{\alpha\beta}\left(u'_\alpha-u_\alpha\right)n_\beta ds+\int_{\Delta\Sigma}\sigma_{\alpha\beta}u'_\alpha n_\beta ds\right]. \tag{14}$$

Таким образом, формула (14) позволяет вычислить скорость оттока энергии при росте трещины. Отметим, что формально выражение (14) не отличается от аналога для чисто упругой среды, однако в этом случае в выражение для тензора напряжений входит давление жидкости в порах, как это следует из (3).

***J*-интеграл для пороупругой среды.** Формулу (14) удобно использовать, когда имеется аналитическое решение задачи. В случае когда задача может быть решена только численными методами, как показывает опыт теории трещин в упругой среде, удобнее применять другую формулу. Речь идет о вычислении энергии развития трещин с помощью так называемого *J*-интеграла. Рассмотрим для простоты одномерную трещину в плоскости Ox_1x_2, распространяющуюся вдоль оси x_1.

Если процесс совместного деформирования скелета и течения жидкости является медленным, то можно пренебречь силами инерции $\gamma_{s,\alpha}$, $\gamma_{f,\alpha}$ и кинетической энергией. Тогда выражение для *J*-интеграла примет вид

$$\frac{d\Pi}{d\Sigma} \equiv J = \int_{\partial V} \left[\psi_s n_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} \right] ds - \int_V p \frac{\partial \phi}{\partial x_1} d\omega + \Lambda,$$

$$\Lambda = \int_V \left[s_s \frac{\partial T}{\partial x_1} - \rho f_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} \right] d\omega, \qquad (15)$$

где ψ_s — удельная объемная свободная энергия Гельмгольца скелета,

$$\psi_s - \psi_{s0} = \sigma_{0\alpha\beta}\Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + p_0 \Delta\phi - s_{s0}\Delta T + \frac{1}{2}\left(\Delta\sigma_{\alpha\beta}\Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\phi\Delta p - \Delta s_s \Delta T\right).$$

Величина Λ связана с работой массовых сил и неизотермичностью процесса.

Отметим, что формулы (14) и (15) получены из одного и того же исходного уравнения, т. е. обобщенного закона сохранения энергии с учетом развития трещины, поэтому они дают два различных способа вычисления одной и той же величины.

Потенциальная энергия пороупругой среды с трещиной. В теории упругости хорошо известно, что в упругом теле при механическом равновесии потенциальная энергия достигает минимума как функционал допустимых виртуальных перемещений [7]. Если указанное тело содержит движущуюся трещину, выясняется, что вариационная производная указанной потенциальной энергии по длине трещины равна энергии, необходимой для развития трещины, т. е. *J*-интегралу [9]. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо и для пороупругой среды. Для этого предварительно необходимо обобщить выражение потенциальной энергии.

Потенциальная энергия чисто упругой среды для изотермических процессов определяется как [7]:

$$P = \int_V \left(W(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \rho F_\gamma u_\gamma \right) d\omega - \int_{S_T} T_\gamma u_\gamma ds, \qquad (16)$$

где $W(\varepsilon_{ij})$ — объемная плотность свободной (упругой) энергии; F_i — массовая плотность внешних сил; T_i — поверхностная сила, заданная на части S_T поверхности тела, на остальной части S_u задано перемещение, $\partial V = S_T \cup S_u$. В (16) можно рассматривать компоненты вектора перемещений u_i как обобщенные координаты, а величины F_i, T_i — как обобщенные силы.

Если обобщенные силы заданы и по определению не варьируются, то из (16) получим известный результат:

$$\delta P = 0, \tag{17}$$

т. е. вариация потенциальной энергии в положении механического равновесия относительно обобщенных координат равна нулю. Для линейно упругого тела можно показать, что потенциальная энергия при этом имеет минимум.

В случае пороупругой среды этот потенциал для изотермических процессов обобщается следующим образом:

$$P = \int_V \left[\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi) - p\phi - \rho F_\gamma u_\gamma \right] d\omega - \int_{S_T} T_\gamma u_\gamma ds. \tag{18}$$

Здесь, по сравнению с (16), имеется дополнительная обобщенная координата ϕ и соответствующая обобщенная сила p. Если в рассматриваемом теле нет трещин, т. е. эти поля гладкие и не имеют сингулярности, то получим, что выполняется равенство (17). В случае наличия трещины [9] для чисто упругой среды вариационная производная по длине трещины равна J-интегралу. Покажем, что аналогичное равенство имеет место и для пороупругой среды.

Рассмотрим пространственно двумерный случай. Пусть одномерная прямолинейная трещина занимает отрезок $[0, l]$ на оси Ox_1 в плоскости Ox_1x_2. Возьмем произвольную область V с границей $\Gamma = \partial V$, содержащую кончик трещины (рисунок). Полагаем, что на части границы S_T задана сила $\mathbf{T}$, а на оставшейся части S_u границы $\mathbf{\Gamma}$ — вектор перемещений $\mathbf{u}$. Границы трещины свободны от нагрузок. Далее для простоты предположим, что массовые силы отсутствуют (при необходимости они могут быть учтены так же, как и изменение температуры).

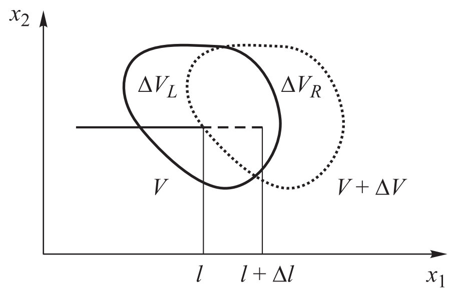

Схема для вычисления потока энергии при развитии трещины в пороупругой среде

Пусть теперь трещина получает приращение Δl, в результате чего происходит изменение полей, описывающих состояние среды. Для какого-либо поля f его результирующее состояние обозначим как $f + \Delta f$. Одновременно с этим будем полагать, что область V сдвигается как единое целое вместе с кончиком трещины. Результирующую область можно представить в виде $V + \Delta V_R - \Delta V_L$ (см. рисунок).

В процессе развития трещины поля, описывающие состояния среды, изменяются. Рассмотрим их как функцию трех переменных: двух пространственных координат x_α и длины l трещины, $f = f(x_1, x_2, l)$.

Отметим, что имеет место равенство

$$\int_{S_T} T_\gamma \Delta u_\gamma ds = \int_\Gamma \left(T_\gamma + \Delta T_\gamma \right) \Delta u_\gamma d\omega, \tag{19}$$

которое следует из того, что $\Delta T_\gamma = 0$ на S_T, $\Delta u_\gamma = 0$ на S_u и $T_\gamma^0 + \Delta T_\gamma = 0$ на берегах трещины.

Вычислим вариационную производную потенциальной энергии по длине трещины

$$-\frac{dP}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_\Gamma \left(T_\gamma + \Delta T_\gamma \right) \Delta u_\gamma ds + \right.$$

$$\left. + \int_V \left[p \Delta\phi - \psi_s \left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi + \Delta\phi \right) + \psi_s \left(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi \right) \right] \right\};$$

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \int_\Gamma \left(T_\gamma + \Delta T_\gamma \right) \Delta u_i ds + \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \int_V p \Delta\phi dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_\Gamma T_\gamma \left(X_1, x_2, l \right) \frac{\partial u_\gamma \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} ds - \int_\Gamma T_\gamma \left(X_1, x_2, l \right) \frac{\partial u_\gamma \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial x_1} ds +$$

$$+ \int_V p \left[\frac{\partial\phi \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} - \frac{\partial\phi \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2,$$

где $X_1 = x_1 - l$.

Согласно приведенной схеме (см. рисунок) можно записать

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \int_V \left[\psi_s \left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi + \Delta\phi \right) - \psi_s \left(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi \right) \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_{V + \Delta V_L - \Delta V_R} \psi_s \left(X_1, x_2, l_0 + \Delta l \right) dX_1 dx_2 - \int_V \psi_s \left(X_1, x_2, l_0 \right) dX_1 dx_2 \right\} =$$

$$= -\int_\Gamma \psi_s \left(X_1, x_2, l \right) dX_1 dx_2 + \int_V \frac{\partial\psi_s \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} dX_1 dx_2$$

и

$$\int_V \frac{\partial\psi_s \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} dX_1 dx_2 = \int_V \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta} \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} + p \frac{\partial\phi \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} \right) dX_1 dx_2 =$$

$$= \int_\Gamma T_i \left(X_1, x_2, l \right) \frac{\partial u_i \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} dX_1 dx_2 + \int_V p \frac{\partial\phi \left(X_1, x_2, l \right)}{\partial l} dX_1 dx_2.$$

В результате получим

$$-\frac{dP}{dl} = \int_\Gamma \left[\psi_s dx_2 - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} ds \right] - \int_V p \frac{\partial\phi}{\partial x_1} d\omega \equiv J. \tag{20}$$

Формула (20) может оказаться полезной при вычислении потока энергии в процессе развития трещины. Если надлежащим образом обобщить выражение (18) для потенциала, то равенство (20) можно получить и в более общем неизотермическом случае, а также с учетом массовых сил.

Асимптотика полей в кончике трещины, распространяющейся в пороупругой среде. Любая из формул (14), (15) или (20) позволяет вычислить энергию, необходимую для развития трещин в пороупругой среде, если известны поля перемещений, напряжений и деформаций. На фронте (кончике) трещины поля напряжений имеют особенность. Информация об асимптотическом поведении решения в окрестности этих точек представляет существенный интерес. Для чисто упругой среды соответствующая асимптотика известна [7, 9–11].

Аналогичная задача для пороупругой среды гораздо более сложная, ее исчерпывающее решение до сих пор не известно. Решение этой задачи будет получено ниже для одного частного, но важного для приложений случая.

Рассмотрим неограниченную двумерную пороупругую среду, в которой расположена трещина, представляющая собой отрезок $\Gamma=[-a,a]$ оси Ox_1. Будем полагать, что трещина развивается из некоторого известного начального состояния, т. е. $a=a(t)$. Конкретный закон роста трещины в рассматриваемом случае неважен.

Получим асимптотики полей перемещений, напряжений и давления на больших временах в случае, если трещина развивается достаточно быстро, т. е. характерное время изменения длины трещины существенно меньше фильтрационных времен в среде.

Будем полагать процесс изотермическим, а среду — изотропной и однородной. Опорные значения параметров примем равными нулю. В этом случае (см. (3)) $b_{\alpha\beta}=b\delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — компоненты единичного тензора), $\alpha_\phi=0$, уравнения и определяющие соотношения модели Био пороупругой среды принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta}=2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}+\lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}-b\delta_{\alpha\beta}p;\quad \varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right);$$

$$\frac{\partial m_f}{\partial t}+\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha}=0,\quad m_f=\rho_f\phi,\quad \phi=\frac{1}{N}p+\alpha\varepsilon;\quad w_\alpha=-k_p\frac{\partial p}{\partial x_\alpha},\quad k_p=\frac{\rho_f k}{\mu}, \tag{21}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе; $\varepsilon=\varepsilon_{\alpha\alpha}$ — след тензора деформаций.

Граничные условия на берегах трещины $\Gamma^{\pm}$ соответствуют заданному в трещине давлению:

$$\mathbf{n}^{\pm}\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}^{\pm}=-p_c;\quad \mathbf{m}^{\pm}\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}^{\pm}=0;\quad p^{\pm}=p_c. \tag{22}$$

Здесь p_c — заданное распределение давления в трещине; $\mathbf{m}$ — произвольный касательный к срединной поверхности трещины вектор; $\mathbf{n}$ — вектор единичной внешней нормали; верхним индексом «$\pm$» обозначены величины, отнесенные к берегам $\Gamma^{\pm}$ трещины. Касательно вида зависимости p_c от координаты и времени будем предполагать, что она является достаточно гладкой и ограниченной.

На бесконечности полагаем заданными условия затухания

$$\sigma\to 0\,,\ \nabla p\to 0 \tag{23}$$

при $x_1^2+x_2^2\to\infty$.

В начальный момент времени $t = 0$ распределения полей имеют вид

$$\sigma = 0, \quad p = 0. \tag{24}$$

Представим решение задачи (21)–(24) в виде суммы двух полей

$$u = u_1 + u_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad p = p_1 + p_2. \tag{25}$$

Первая компонента решения удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{1\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0, \ \ \sigma_{1\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{1\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{1\gamma\gamma} - b\delta_{\alpha\beta}p_1, \ \ \varepsilon_{1\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{1\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_{1\beta}}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$\Delta p_1 = 0 \tag{26}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{n}^\pm \cdot \sigma_1 \cdot \mathbf{n}^\pm = -p_c, \ \ \mathbf{m}^\pm \cdot \sigma_1 \cdot \mathbf{n}^\pm = 0, \ \ p_1^\pm = p_c \tag{27}$$

на берегах $\Gamma^\pm$ и условиями убывания на бесконечности

$$\sigma_1 \to 0, \ \ \nabla p_1 \to 0, \ \ x_1^2 + x_2^2 \to \infty. \tag{28}$$

В (26) Δ — оператор Лапласа.

Вторая компонента решения будет удовлетворять системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{2\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0, \ \ \sigma_{2\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{2\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{2\gamma\gamma} - b\delta_{\alpha\beta}p_2; \\ \varepsilon_{2\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{2\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_{2\beta}}{\partial x_\alpha}\right); \end{gathered} \tag{29}$$

$$\frac{1}{N_1}\frac{\partial p_2}{\partial t} + b\frac{\partial \varepsilon_{2\gamma\gamma}}{\partial t} = \frac{k}{\eta}\Delta p_2 - \frac{1}{N_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} - b\frac{\partial \varepsilon_{1\gamma\gamma}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K_f}, \ \ \frac{1}{K_f} = \frac{\phi_0}{\rho_f}\frac{\partial \rho_f}{\partial p},$$

с граничными условиями на берегах $\Gamma^\pm$ и на бесконечности

$$\mathbf{n}^\pm \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{n}^\pm = 0, \ \ \mathbf{m}^\pm \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{n}^\pm = 0, \ \ p_2 = 0, \tag{30}$$

$$\sigma_2 \to 0, \ \ \nabla p_2 \to 0, \ \ x_1^2 + x_2^2 \to \infty \tag{31}$$

и начальным условием

$$\hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_1, \quad p_2 = -p_1 \tag{32}$$

при $t = 0$.

Отметим, что задача (26)–(28) для напряжений формально ничем не отличается от аналогичной задачи в упругой среде с учетом температурных деформаций. Поэтому можно использовать метод, приведенный в работе [10]. Для этого введем комплексную функцию $F(z)$, действительная часть которой равна давлению p, и аналитические функции:

$$u_1^* + iv_1^* = \int F(z)\,dz,\;\; u_1 = u_1' + \frac{b}{2(\lambda+\mu)} u_1^*,\;\;\; v_1 = v_1' + \frac{b}{2(\lambda+\mu)} v_1^*. \tag{33}$$

Подставляя (33) в выражения (26)–(28), формально получаем задачу для чисто упругой среды

$$\frac{\partial \sigma_{1\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0,\;\; \sigma_{1\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon'_{1\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon'_{1\alpha\beta},\;\;\; \varepsilon'_{1\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_{1\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_{1\beta}}{\partial x_\alpha}\right) \tag{34}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{n}^{\pm}\cdot\sigma_1\cdot\mathbf{n}^{\pm} = -p_c,\;\; \mathbf{m}^{\pm}\cdot\sigma_1\cdot\mathbf{n}^{\pm} = 0 \tag{35}$$

на берегах $\Gamma^{\pm}$ и условиями убывания на бесконечности.

Решение задачи (34), (35) имеет вид

$$\sigma_{1,11} = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1',\;\; \sigma_{1,22} = \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1',\;\; \sigma_{1,12} = -y \operatorname{Re} Z_1'; \tag{36}$$

$$2\mu u_1' = (1-2\sigma)\operatorname{Re} Z_1^0 - y \operatorname{Im} Z_1,\;\; 2\mu v_1' = 2(1-\sigma)\operatorname{Im} Z_1^0 - y \operatorname{Re} Z_1, \tag{37}$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{p_c(\xi,t)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi;\qquad \frac{dZ_1^0}{dz} = Z_1. \tag{38}$$

Решение задачи (26)–(28) для давления запишется как

$$p_1 = -\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{p_c(\xi,t)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi\right] = -\operatorname{Re} Z_1. \tag{39}$$

Отметим, что из (36) и (39) следует равенство

$$\sigma_{1,11} + \sigma_{1,22} = -2p_1. \tag{40}$$

Введем в окрестности кончика трещины $z = a$ полярные координаты (r,θ), такие, что точка $r = 0$ соответствует кончику трещины. Тогда при $r \to 0$ имеем следующие асимптотические выражения для найденных полей:

$$\sigma_{1,11} = k_I \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),\;\; \sigma_{1,22} = k_I \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{41}$$

$$\sigma_{1,12} = k_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2};\qquad p_1 = -k_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}};$$

$$u_1' = \frac{k_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sigma + \sin^2\frac{\theta}{2}\right);\;\; v_1' = \frac{k_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\sigma - \cos^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{42}$$

где

$$k_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p_c(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi. \tag{43}$$

В этом случае выражения для соответствующих «истинных» перемещений примут вид

$$u_1 = u_1' + \frac{b}{2(\lambda+\mu)} u_1^*; \quad v_1 = v_1' + \frac{b}{2(\lambda+\mu)} v_1^*. \tag{44}$$

Отсюда с учетом (33), (40), (42) получим

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - 2\sigma - \frac{\mu b}{\lambda+\mu} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right); \\ v_1 &= \frac{k_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left(2 - 2\sigma - \frac{\mu b}{\lambda+\mu} - \cos^2\frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \tag{45}$$

Перейдем к определению второй компоненты решения, удовлетворяющей системе уравнений (29)–(32). Рассмотрим уравнение для массового содержания жидкости (уравнение для давления) в системе (29):

$$\frac{1}{N} \frac{\partial p_2}{\partial t} + b \frac{\partial \varepsilon_{2\gamma\gamma}}{\partial t} = \frac{k}{\eta} \Delta p_2 - \frac{1}{N} \frac{\partial p_1}{\partial t} - b \frac{\partial \varepsilon_{1\gamma\gamma}}{\partial t}. \tag{46}$$

Пусть кончик трещины $z = a$ движется с постоянной скоростью u_0 вдоль положительного направления оси Ox_1. Рассмотрим связанную с кончиком трещины систему координат и предположим, что движение в этой системе координат установившееся. Это условие будет выполняться, если рассматриваются достаточно большие времена и движение трещины является быстрым по сравнению с процессами фильтрации. Сохраняя обозначения координат, имеем в подвижной системе координат уравнение

$$u_0 \frac{1}{N_1} \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + u_0 b \frac{\partial \varepsilon_{2\gamma\gamma}}{\partial x_1} + \frac{k}{\eta} \Delta p_2 = -u_0 \frac{1}{N_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - u_0 b \frac{\partial \varepsilon_{1\gamma\gamma}}{\partial x_1} \tag{47}$$

с граничными условиями $p_2 = 0$ на трещине и условиями затухания $\nabla p_2 \to 0$ на бесконечности.

Если правая часть уравнения (47) тождественно равна нулю, то и $p_2 \equiv 0$. Поэтому характер поведения решения p_2 полностью определяется правой частью (47). Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям в окрестности кончика трещины, можно искать в виде

$$p_2 = r^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{(2k-1)\theta}{2} + o(r^\alpha). \tag{48}$$

Подставляя (48) в (47) с учетом построенного ранее асимптотического поведения первой компоненты решения, получаем

$$p_2 = \sqrt{r}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{(2k-1)\theta}{2} + o\left(\sqrt{r}\right), \tag{49}$$

т. е. $\alpha = 1/2$. Если искать решение $\varepsilon_{2\gamma\gamma}$ в виде, аналогичном (49) с неизвестными коэффициентами b_k, то из (47) и (29)–(31) можно определить все коэффициенты a_k и b_k, а также напряжения и перемещения σ_2, u_2, v_2. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные выражения будут бесконечно малыми по сравнению с соответствующими величинами для первой компоненты решения. В рассматриваемом случае ими можно пренебречь.

Следовательно, выражения (41)–(45) решают поставленную задачу. Отметим, что в рамках сделанных допущений поправка на фильтрацию по сравнению с чисто упругой задачей в первом приближении не зависит от скорости движения трещины.

Критерий развития трещины в пороупругой среде. В соответствии с изложенным выше для решения задачи в окрестности кончика трещины второй компонентой решения можно пренебречь и асимптотика в окрестности кончика трещины полностью определяется первой компонентой решения (поля с индексом «1»). Задачу (21) для напряжений и деформаций (далее индекс «1» опущен) с учетом (40) и сделанных замечаний можно записать в виде

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0;\ \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda_1\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma},\ \lambda_1 = \lambda + \frac{b(\lambda+\mu)}{1-b},\ \ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \tag{50}$$

Задача (50) по форме совпадает с соответствующей задачей в случае чистой упругости. Различие заключается только в том, что теперь вместо коэффициента λ в задачу входит «эффективный» коэффициент λ_1. Соответственно поменяются все коэффициенты в определяющих соотношениях теории упругости, кроме коэффициента Ламе μ. Запишем некоторые из них:

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{b\mu}{2(\lambda+\mu)};\quad K_1 = K + \frac{b(\lambda+\mu)}{1-b};\quad E_1 = E + \frac{b\mu^2}{\lambda+\mu}. \tag{51}$$

Вычислим значение J-интеграла с учетом полученного решения. Согласно (15), в изотермическом случае имеем

$$J = \int_{\partial V}\left[\Psi_s n_1 - \sigma_{\alpha\beta}n_\alpha\frac{\partial u_\beta}{\partial x_1}\right]ds - \int_V p\frac{\partial\phi}{\partial x_1}d\omega,\ \ d\Psi_s = \sigma_{\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta} + pd\phi,\ \ \phi = \frac{1}{N}p + b\varepsilon. \tag{52}$$

Учитывая полученные выше результаты, (52) существенно упрощается. В частности, объемный интеграл в (52) переходит в поверхностный:

$$J = \int_{\partial V}\left[F_s n_1 - \sigma_{\alpha\beta}n_\alpha\frac{\partial u_\beta}{\partial x_1}\right]dw,\qquad F_s = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{53}$$

Выражение (53) отличается от выражения для случая чистой упругости только тем, что коэффициенты упругости теперь «эффективные». Результат вычисления (53) для полей (50) хорошо известен [10]. С учетом этого имеем

$$J = \frac{1-\sigma_1}{2\mu} k_I^2 = \left[\frac{1-\sigma}{2\mu} - \frac{b}{4(\lambda+\mu)} \right] k_I^2, \qquad (54)$$

где k_I — коэффициент интенсивности напряжений, который зависит от длины трещины и нагрузки точно так же, как и для чистой упругости.

Формула (54) отличается от аналогичной формулы для чисто упругой среды тем, что здесь присутствует параметр Био b, характеризующий влияние поля давлений жидкости в порах на напряженно-деформированное состояние пороупругой среды. Это выражение показывает, что при движении трещины в пороупругой среде при прочих равных условиях выделяется меньше энергии.

Заключение. На основании многочисленных экспериментов с различными материалами в широком диапазоне изменения внешних условий была сформулирована концепция квазихрупкого разрушения [11], основанная на классических работах А. Гриффитса и Г. Ирвина. Согласно этой концепции, величина необратимой работы, затраченной на образование единицы площади свободной поверхности тела при развитии трещины, является постоянной материала.

Теория хрупкого и квазихрупкого разрушения материалов, подчиняющихся линейным законам упругости, хорошо развита. Значительно меньше развита соответствующая теория для пороупругих деформируемых тел, в которых имеет место фильтрация и связанные с ней релаксационные процессы. Например, если трещина покоится и граничные условия стационарные, то в общем случае коэффициенты интенсивности будут зависеть от времени.

Представлены результаты, обобщающие предложенные А. Гриффитсом и Г. Ирвином классические подходы к исследованию механики хрупкого разрушения для случая пороупругих сред. В частности, получены различные выражения ((14), (15) и (20)) для потока энергии пороупругой среды в точках контура трещины нормального отрыва на единицу вновь образовавшейся площади трещины. Для того чтобы движение трещины было возможным, энергия, выраженная этими формулами, должна быть не меньше экспериментально определяемого значения γ. Чтобы использовать эти формулы, необходимо знать асимптотику величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, и поля давления в жидкости при приближении к контуру трещины. Указанную асимптотику для быстрой плоской одномерной трещины дают формулы (41)–(45). Подставляя эти формулы в (15), получаем выражение (54) для J-интеграла. При этом коэффициент интенсивности связан с нагрузкой и длиной трещины той же формулой, что и для чисто упругой среды. Приравнивая (54) критическому значению, определяем критерий развития трещины в пороупругой среде, учитывающий влияние поля давления с помощью коэффициента Био b. При $b = 0$ получаем формулу для чисто упругой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Tran. R. Soc. Lon. A. 1921. Vol. 221. P. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006

2. *Irwin G.R.* Fracture dynamics // Fracturing of metals. ASM, 1948. P. 147–166.

3. *Irwin G.R.* Onset of fast crack propagation in the high strength steel and aluminum alloys. Naval Research Lab., 1956. 23 p.

4. *Cherepanov G.P.* The propagation of cracks in a continuous medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1967. Vol. 31. Iss. 3. P. 503–512.
DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2

5. *Rice J.R.* A Path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35. P. 379–386.

6. *Walters M.C., Paulino G.H., Dodds R.H.* Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions // Engineering Fracture Mechanics. 2005. Vol. 72. Iss. 11. P. 1635–1663. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.01.002

7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. СПб.: Лань, 2004. 560 с.

8. *Rice J.R.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture // Fracture: an advanced treatise. Academic Press, 1968. P. 191–311.

9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

10. *Райс Д.* Механика очага землетрясения; пер. с англ. М.: Мир, 1982. 217 с.

11. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Рамазанов Мукамай Магомедович — д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4), заведующий лабораторией «Геотермомеханика» Института проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН (Российская Федерация, Республика Дагестан, 367030, Махачкала, пр-т И. Шамиля, д. 39 а).

Савенков Евгений Борисович — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Рамазанов М.М., Савенков Е.Б. Критерий развития трещин в пороупругой среде // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 5. С. 65–82.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-65-82

FRACTURE DEVELOPMENT CRITERION FOR A POROELASTIC MEDIUM

M.M. Ramazanov[1, 2] mukamay-ipg@mail.ru
E.B. Savenkov[1] e.savenkov@googlemail.com

[1] Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
[2] Institute for Geothermal Research, Dagestan Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Republic of Dagestan, Russian Federation

Abstract

The central idea of the classical fracture growth theory based on the concept of brittle and quasi-brittle fracture developed by A.A. Griffith and G.R. Irwin is a fracture growth criterion. There may be various ways to state this

Keywords

Fracture mechanics, fracture, J-integral, poroelasticity, Biot equations

criterion. Depending on the specific problem, each statement may be more or less practical for investigating fracture growth. The main results of this theory are valid for deformable bodies that comply with linear elasticity laws. Since there exist numerous practical applications, generalising these equations to include poroelastic media is of utmost importance. We present a generalisation of the results obtained previously for purely elastic media for the case of deformable Biot poroelastic media. We show that the pressure and stress fields in the vicinity of the fracture tip exhibit singular behaviour in the general case. This allowed us to derive a fracture growth criterion for a poroelastic medium that takes into account the effect of the fluid pressure field in the pores

Received 12.09.2017

The study was supported by Russian Science Foundation (project no. 15-11-00021)

REFERENCES

[1] Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Tran. R. Soc. Lon. A*, 1921, vol. 221, pp. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006

[2] Irwin G.R. Fracture dynamics. In: Fracturing of metals. ASM, 1948, pp. 147–166.

[3] Irwin G.R. Onset of fast crack propagation in the high strength steel and aluminum alloys. Naval Research Lab., 1956. 23 p.

[4] Cherepanov G.P. The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, vol. 31, iss. 3, pp. 503–512. DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2

[5] Rice J.R. A Path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, vol. 35, pp. 379–386.

[6] Walters M.C., Paulino G.H., Dodds R.H. Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, vol. 72, iss. 11, pp. 1635–1663. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.01.002

[7] Sedov L.I. Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2. [Continuum mechanics. Vol. 2]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2004. 560 p.

[8] Rice J.R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Fracture: an advanced treatise. Academic Press, 1968, pp. 191–311.

[9] Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some problems of mathematical elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p.

[10] Rice J.R. The mechanics of earthquake rupture. Division of Engineering, Brown University, 1979. 194 p.

[11] Cherepanov G.P. Mekhanika khrupkogo razrusheniya [Fast fracture mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 640 p.

Ramazanov M.M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Head of Laboratory of Geothermal Mechanics, Institute for Geothermal Research, Dagestan Scientific Center of Russian Academy of Sciences (I. Shamilya prospekt 39a, Makhachkala, Republic of Dagestan, 367030 Russian Federation).

Savenkov E.B. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Ramazanov M.M., Savenkov E.B. Fracture Development Criterion for a Poroelastic Medium. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 5, pp. 65–82 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-65-82