

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХ ОБОЛОЧКАХ С ЖИДКОСТЬЮ МЕЖДУ НИМИ И ОКРУЖЕННЫХ УПРУГОЙ СРЕДОЙЮ.А. Блинков¹

blinkovua@info.sgu.ru

Е.В. Евдокимова²

eev2106@mail.ru

Л.И. Могилевич²

mogilevich@sgu.ru

А.Ю. Ребрина²

anblinkova26@gmail.com

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Российская Федерация

² Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Саратов, Российская Федерация

Аннотация**Ключевые слова**

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости. Задачи описываются уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости в виде обобщенных уравнений Кортвега — де Вриза. Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных моделей учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, в виде системы обобщенных уравнений Кортвега — де Вриза. В работе исследованы модели волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках Кирхгофа — Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними, окруженных упругой средой, действующей как в нормальном, так и в продольном направлении. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка — Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений

Нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки, базис Грёбнера

Поступила в редакцию 20.10.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а)

Постановка задачи. Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в работах [1, 2]. Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [3], содержащих вязкую несжимаемую жидкость,

на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортевега — де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [4], которые отличаются учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, немонотонным снижением скорости ее распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим окруженные упругой средой две соосные бесконечно длинные упругие оболочки (рис. 1), между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость.

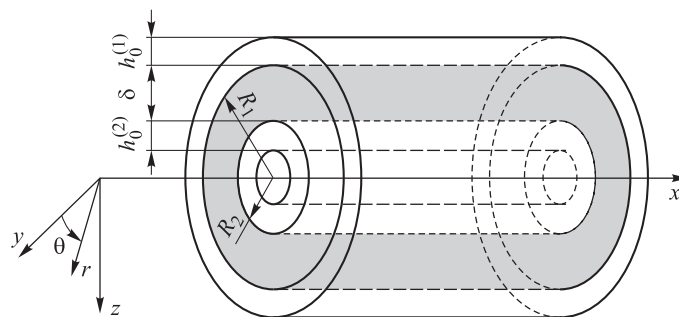


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки:

δ — ширина щели, занимаемой жидкостью; $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$ — внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$ — внешний радиус внутренней оболочки; $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ — толщины оболочек; индексом «1» обозначены все механические перемещения внешней оболочки, индексом «2» — внутренней оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа — Лява, полагаем материал линейно-упругим с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [5]: $\sigma_i = E e_i$, где E — модуль Юнга. Уравнение движения несжимаемой

вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат в случае осесимметричного течения записывается в виде [2, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right]; \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right]; \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_x, V_r — проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости жидкости; t — время; ρ — плотность; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; x, r — цилиндрические координаты. На границе оболочек и жидкости (см. рис. 1) при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}; \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб оболочки, положительный к центру кривизны. Уравнения динамики оболочки записываются в виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} - \\ - \left[k_3 R^{(i)2} \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2 R^{(i)2}} U^{(i)3} \right] (2-i) = -q_x^{(i)}; \\ \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left\{ \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)} \right)_{xx} - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\}_x - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \right\} + \\ + k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2} W^{(i)} (2-i) + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где индексом «1» обозначены все механические перемещения внешней оболочки, индексом «2» — внутренней оболочки; ρ_0 — плотность; μ_0 — коэффициент Пуассона; $U^{(i)}$ — продольное перемещение; $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек; x — продольная координата; q_x^i, q_n — напряжения со стороны жидкости, находящейся между

оболочками; $k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2} W^{(1)}$, $k_3 \frac{R^{(i)2} \rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^4} U^{(1)}$ — реакция упру-

гой среды в радиальном и осевом направлениях [9–14], $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}$ — скорость звука в оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются по формулам

$$q_r = -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad q_x = \rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости между упругими оболочками. Принимая длину волны l за характерный размер и обозначая амплитуды продольного перемещения u_m и прогиба w_m , переходим к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}. \quad (5)$$

Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = O(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (6)$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (7)$$

где c — неизвестная безразмерная скорость волны.

Запишем систему уравнений (3) в безразмерных переменных с использованием формул (5)–(7) и разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = u_m / l$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (8)$$

Подставим разложение (8) в уравнения (3) и после некоторых преобразований этих уравнений, аналогичных приведенным в работах [3, 4], приравняем нулю коэффициенты при ε^0 , получим

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10}^{(i)} = 0.$$

Следовательно, u_{10} — произвольная функция; $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ — безразмерная скорость волны, так как $c^2 = 1 - \mu_0^2$.

Приравниваем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учитывая предыдущие результаты, определяем

$$\begin{aligned}
 & u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} + \\
 & + \frac{2-i}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \left(\mu_0^2 k_1 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)2} \varepsilon} u_{10}^3 \right) = \\
 & = - \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^2 c_0^2} \left(q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

В представлениях (8) взято два первых члена разложения по ε для учета нелинейности исходной системы уравнений (3).

В случае когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равной нулю и получаются независимые уравнения, каждое из которых имеет точное решение. Необходимо определить правую часть, для чего требуется решить уравнение гидродинамики для случая кольцевого сечения трубы.

Определение напряжений, действующих на оболочки со стороны вязкой несжимаемой жидкости. Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}
 V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}; \\
 p &= \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = O(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = O(1); \\
 \frac{w_m}{R_2} &= \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Полагая во введенных безразмерных переменных $\delta/l=0$, $\delta/R_2=0$ (нулевое приближение по δ/l — гидродинамическая теория смазки [15]), а также $\frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} = 0$ (ползущие течения [16]) и раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots,$$

для первых членов разложения из уравнений гидромеханики (1) и граничных условий прилипания жидкости (2) получаем уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}
 v_r^0 &= - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 1; \\
 v_r^0 &= - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 0.
 \end{aligned}$$

С точностью до ψ, λ из (4) определяем

$$q_x^i \approx \rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r_2^*=0; \eta^*=1}; \quad q_n \approx -\frac{\rho v w_m l c_0}{\delta^3} P.$$

Из уравнений движения жидкости с учетом граничных условий найдем

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*;$$

$$v_x^0 = (r^{*2} - r^*) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*.$$

Учитывая, что введенные переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \epsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ и $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$, получаем

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho v}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)} \right],$$

$$q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i. \quad (10)$$

Уравнение динамики оболочки. Система уравнений (9) с учетом найденной правой части (10) преобразуется к виду

$$u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\epsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[k_1 \mu_0^2 \frac{R^{(1)2}}{l^2 \epsilon} u_{10\xi\xi}^{(1)} - k_3 \frac{R^{(2)2}}{l^2 \epsilon} u_{10}^{(1)} + k_4 \frac{n_m^2}{R^{(1)2} \epsilon} u_{10}^{(1)3} \right] +$$

$$+ 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \epsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)} \right] = 0;$$

$$u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\epsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} +$$

$$+ 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \epsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)} \right] = 0.$$

Здесь с принятой точностью $h_0 / R \approx O(\epsilon)$, $\delta / R_2 = \psi \ll 1$, обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, при этом $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Введем обозначение $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = \eta$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$c_1 = \left[c_2 \epsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}; \quad c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \epsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}; \quad c_3 = \frac{c_2 l \epsilon^2}{c_1 u_m} \frac{12}{\sqrt{1 - \mu_0^2}};$$

$$\sigma_1 = \frac{c_1}{c_2} \frac{k_1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \mu_0^2 \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}; \quad \sigma_3 = \frac{1}{c_1 c_2} \frac{k_2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}; \quad \sigma_4 = \frac{c_3^2}{c_2 c_1^3} \frac{k_4}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{u_m}{R^2 \varepsilon}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0; \\ \phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (11) при отсутствии жидкости распадается на два независимых уравнения:

1) для $\phi^{(1)}$

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 = 0$$

с точным решением

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1 \right) t \right] \right\};$$

2) для $\phi^{(2)}$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0$$

с точным решением

$$\phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[\eta - \frac{\sigma_3}{\sigma_4} t \right] \right\},$$

где σ_3/σ_4 — произвольная величина.

Очевидно, что скорость солитона $\phi^{(1)}$ больше скорости солитона $\phi^{(2)}$ при одинаковых амплитудах. При наличии жидкости необходимо численное исследование системы уравнений (11) при начальном условии

$$\phi^{(1)}(\eta, 0) = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \eta \right\}, \quad \phi^{(2)}(\eta, 0) = 0. \quad (12)$$

В случае если взаимодействовать с упругой средой будет не только внешняя, но и внутренняя оболочка, система уравнений (11) станет симметричной:

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0; \\ \phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \sigma_1\phi_\eta^{(2)} - \sigma_3\int\phi^{(2)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(2)}d\eta\right)^3 + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

с точными решениями

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1 \right) t \right] \right\}.$$

Численное моделирование. Подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные, развит в работах [17, 18]. Построение базиса Грёбнера соответствующих разностных многочленов позволяет реализовать разностную схему, которая автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования. Запишем систему уравнений (11) в интегральной форме

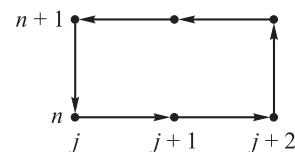


Рис. 2. Базовый контур для уравнения (14)

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(1)} - 3\phi^{(1)2} - \sigma_1\phi^{(1)} \right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(-\sigma_3\Psi + \sigma_4\Psi^3 \right) dt d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(1)} - \phi^{(2)} \right) dt d\eta = 0; \quad (14)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(2)} - 3\phi^{(2)2} \right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(2)} - \phi^{(1)} \right) dt d\eta = 0$$

для $\int \phi^{(1)} d\eta = \Psi$ и любых области Ω и интервала $a > b$. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$, $U_j^n = \Psi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 2.

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta}^{(i)} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j);$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta}^{(i)} d\eta = u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_{j+2}) - u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_j); \quad (15)$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u d\eta = U(t, \eta_{j+2}) - U(t, \eta_j).$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения для u и формулу Симпсона для U , полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (14), (15) в виде

$$\left(-\left(u_{\eta\eta}^{(1)n} + u_{\eta\eta}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta}^{(1)n} - u_{\eta\eta}^{(1)n+1} \right) - 3\left(u_j^{(1)2n} + u_j^{(1)2n+1} - u_{j+2}^{(1)2n} - u_{j+2}^{(1)2n+1} \right) \right) \frac{\tau}{2} +$$

$$+ \left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j+1}^{(1)n} \right) 2h + \left(\left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) \left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \right.$$

$$\left. - \sigma_3 \left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j+1}^n \right) + \sigma_4 \left(U_{j+1}^{3n+1} + U_{j+1}^{3n} \right) \right) h\tau = 0;$$

$$\left(-\left(u_{\eta\eta}^{(2)n} + u_{\eta\eta}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta}^{(2)n} - u_{\eta\eta}^{(2)n+1} \right) - 3\left(u_j^{(2)2n} + u_j^{(2)2n+1} - u_{j+2}^{(2)2n} - u_{j+2}^{(2)2n+1} \right) \right) \frac{\tau}{2} +$$

$$+ \left(u_{j+1}^{(2)2n+1} - u_{j+1}^{(2)n} \right) 2h + \left(\left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) \right) h\tau = 0;$$

$$\begin{aligned} (u_{\eta_{j+1}}^{(i)n} + u_{\eta_j}^{(i)n}) \frac{h}{2} &= u_{j+1}^{(i)n} - u_j^{(i)n}; \\ u_{\eta_{j+1}}^{(i)n} 2h &= u_{j+2}^{(i)n} - u_{\eta_j}^{(i)n}; \\ (u_{j+2}^{(1)n} + 4u_{j+1}^{(1)n} + u_j^{(1)n}) \frac{h}{3} &= U_{\eta_{j+2}}^n - U_{\eta_j}^n. \end{aligned}$$

Поскольку исходное дифференциальное уравнение (11) нелинейно, заменим нелинейную часть дополнительной функцией $F^{(i)} = 3u^{(i)2}$. За счет выбора допустимого упорядочения так, что $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ U \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$, а затем переменных n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера, и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим разностную схему для уравнения (11) (рис. 3), аналогичную схеме Кранка — Николсона для уравнения теплопроводности,

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{(1)2n+1} - u_{j-1}^{(1)2n+1}) + (u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1}) + (u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n})}{4h^3} + \\ & + \sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1}) + (u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n})}{4h} - \sigma_3 \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + \\ & + \sigma_4 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0; \tag{16} \\ & (u_{j+1}^{(1)n} + 4u_j^{(1)n} + u_{j-1}^{(1)n}) \frac{h}{3} - (U_{j+1} - U_{j-1}) = 0; \\ & \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{(2)2n+1} - u_{j-1}^{(2)2n+1}) + (u_{j+1}^{(2)2n} - u_{j-1}^{(2)2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1}) + (u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n})}{4h^3} - \\ & - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована линеаризация

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Как правило, число итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое не превышало 2–3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета написана на языке *Python* с использованием пакета *SciPy*^{*}.

^{*} <https://www.scipy.org>

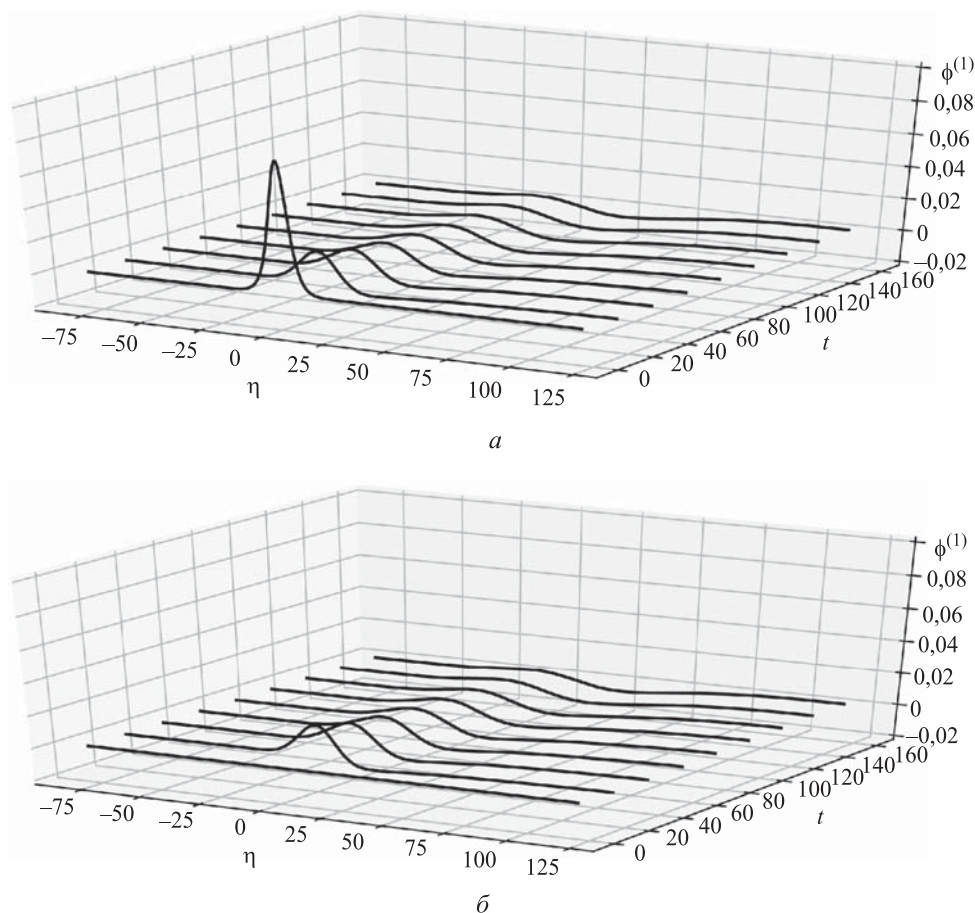


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (11) при $\sigma_1 = 0$ с начальным условием $\phi^{(2)} = 0$ (а) и с $\phi^{(1)}$ (б), взятого из точного решения (13) при $t = 0$ с $\sigma_3 = 0,004$, $\sigma_4 = 0,1$ и $\sqrt{\sigma_3 / \sigma_4} = 0,2$

Заключение. При наличии жидкости между оболочками возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой ее не было в начальный момент времени. За относительно короткий промежуток времени амплитуды волн деформации в обеих оболочках выравниваются. Значение амплитуды равно половине начальной амплитуды во внешней оболочке. Далее наблюдается волнообразование перед основным солитоном как во внешней, так и во внутренней оболочках, вызванное разностью скоростей волн деформации в этих оболочках вследствие влияния окружающей среды. При дальнейшем увеличении времени волнообразование перед основным солитоном в обеих оболочках затухает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 149–171.

2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
3. *Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И.* Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12. № 2. С. 184–197.
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
4. *Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Могилевич Л.И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2012. № 3. С. 42–51.
5. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИИЛ, 1961. 778 с.
6. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 296 с.
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
8. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 490 с.
10. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П.* Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 30–36.
11. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шешенин С.Ф.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318 с.
12. *Михасев Г.И., Шейко А.Н.* О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды БГТУ. 2012. № 6 (153). С. 41–44.
13. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Павлов И.С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 140–150. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
14. *Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 2. С. 145–151.
15. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
16. *Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В.* Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 18. С. 48–54.
17. *Amodio P., Blinkov Yu., Gerdt V., La Scala R.* Algebraic construction and numerical behavior of a new s -consistent difference scheme for the 2D Navier — Stokes equations // Appl. Math. Comput. 2017. Vol. 314. P. 408–421. DOI: 10.1016/j.amc.2017.06.037
18. *Блинков Ю.А., Гердт В.П., Маринов К.Б.* Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 2. С. 28–34.

Блинков Юрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83).

Евдокимова Екатерина Владимировна — аспирантка кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Могилевич Лев Ильич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Ребрина Анастасия Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Ребрина А.Ю. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 6. С. 4–17. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-4-17

SIMULATING WAVE PROCESSES IN TWO SHELLS SEPARATED BY LIQUID AND SURROUNDED BY AN ELASTIC MEDIUM

Yu.A. Blinkov¹

blinkovua@info.sgu.ru

E.V. Evdokimova²

eev2106@mail.ru

L.I. Mogilevich²

mogilevich@sgu.ru

A.Yu. Rebrina²

anblinkova26@gmail.com

¹ **Saratov State University, Saratov, Russian Federation**

² **Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation**

Abstract

There exist mathematical models of wave motion in infinitely long geometrically nonlinear shells containing viscous incompressible fluid. These are based on related hydroelasticity problems described by equations of shell and viscous incompressible fluid dynamics in the form of generalised Korteweg — de Vries equations. Having identified the small parameter of the problem, we used the perturbation method to obtain mathematical models of the wave process in elastic infinitely long geometrically nonlinear coaxial cylindrical shells. These models take the form of a system of generalised Korteweg — de Vries equations. They are different from the ones known previously since they account for the presence of viscous incompressible fluid between shells. The paper investigates the models of wave phenomena occurring in two elastic geometrically nonlinear coaxial cylindrical Kirchhoff — Love shells separated by a layer of viscous incompressible fluid and surrounded by an elastic medium acting both normally

Keywords

Nonlinear waves, viscous incompressible fluid, elastic cylindrical shells, Gröbner basis

and longitudinally. We constructed a Gröbner basis to derive difference schemes of the Crank — Nicolson type for the systems of equations under consideration, accounting for the effect of the fluid. We generated these difference schemes using fundamental integral relations in finite difference form that approximate the initial system of equations

Received 20.10.2017

© BMSTU, 2018

The study was supported by RFBR (project no. 16-01-00175-a)

REFERENCES

- [1] Gromeka I.S. K teorii dvizheniya zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubakh [On the theory of fluid motion in narrow cylindrical tubes]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1952. Pp. 149–171.
- [2] Loytsyanskiy L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003. 840 p.
- [3] Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kovalev A.D., Mogilevich L.I. Mathematical and computer modeling of nonlinear waves dynamics in a physically nonlinear elastic cylindrical shells with viscous incompressible liquid inside them. *Izv. Sarat. Univ. Nov. ser. Ser. Fizika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics], 2012, vol. 12, no. 2, pp. 184–197 (in Russ.). DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-184-197
- [4] Blinkov Yu.A., Kovaleva I.A., Mogilevich L.I. Nonlinear waves dynamics modeling in coaxial geometrically and physically nonlinear shell containing viscous incompressible fluid in between. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika, informatika, fizika* [RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics], 2013, no. 3, pp. 42–51 (in Russ.).
- [5] Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer, 1958. 685 p.
- [6] Vallander S.V. Lektsii po gidroaeromekhanike [Lectures on hydroaeromechanics]. Leningrad, Izd-vo LGU Publ., 1978. 296 p.
- [7] Vol'mir A.S. Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamivs of plates and cshells]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 432 p.
- [8] Vol'mir A.S. Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: zadachi gidrouprugosti [Shells in fluid and gas flow: hydroelasticity problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
- [9] Vlasov V.Z., Leont'yev N.N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, plates and shells on elastic base]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 490 p.
- [10] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *J. Mach. Manufact. Reliab.*, 2008, vol. 37, iss. 3, pp. 230–235. DOI: 10.3103/S1052618808030059
- [11] Bagdov A.G., Erofeev V.I., Sheshenin S.F. Lineynye i nelineynye volny v dispergiruyushchikh sploshnykh sredakh [Linear and nonlinear waves in dispersive continuous media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 318 p.
- [12] Mikhasev G.I., Sheyko A.N. On effect of elastic nonlocality parameter on natural vibration frequency of carbon nanotube in elastic medium. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6 (153), pp. 41–44 (in Russ.).
- [13] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Vychisl. mekh. splosh. sred* [Computational Continuum Mechanics], 2013, vol. 6, no. 2, pp. 140–150 (in Russ.). DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17

[14] Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium. *Acoust. Phys.*, 2017, vol. 63, iss. 2, pp. 148–153. DOI: 10.1134/S1063771017020026

[15] Schlichting H. *Grenzschicht-Theorie*. Verlag und Druck G. Braun, 1951. 483 p.

[16] Popov I.Yu., Rodygina O.A., Chivilikhin S.A., Gusarov V.V. The soliton in the nanotube wall and the Stokes current in it. *Pis'ma v ZhTF*, 2010, vol. 36, no. 18, pp. 48–54 (in Russ.).

[17] Amodio P., Blinkov Yu., Gerdt V., La Scala R. Algebraic construction and numerical behavior of a new s -consistent difference scheme for the 2D Navier — Stokes equations. *Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 314, pp. 408–421. DOI: 10.1016/j.amc.2017.06.037

[18] Blinkov Yu.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. *Program. Comput. Soft.*, 2017, vol. 43, iss. 2, pp. 84–89. DOI: 10.1134/S0361768817020049

Blinkov Yu.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical and Numerical Simulation, Saratov State University (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

Evdokimova E.V. — post-graduate student, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Mogilevich L.I. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Rebrina A.Yu. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Rebrina A.Yu. Simulating Wave Processes in Two Shells Separated by Liquid and Surrounded by an Elastic Medium. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 6, pp. 4–17 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-4-17