УДК 517.956.35 DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21

# ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ И ШАРНИРНО ОПЕРТЫМ КОНЦАМИ

**И.А. Рудаков** rudakov_ia@mail.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**
**МАИ, Москва, Российская Федерация**

**Аннотация**

Исследована задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения вынужденных колебаний двутавровой балки, один конец которой закреплен, а второй шарнирно оперт. Нелинейное слагаемое и правая часть уравнения являются периодическими по времени функциями. Решение ищется в виде ряда Фурье. Для построения ортонормированной системы изучена задача на собственные значения дифференциального оператора, соответствующего исходному уравнению. При исследовании асимптотики собственных значений задачи осуществлена оценка корней соответствующего трансцендентного уравнения. Получены условия, при которых ядро дифференциального оператора является конечномерным и обратный оператор вполне непрерывен на дополнении к ядру. Доказана лемма о существовании и регулярности решений соответствующей линейной задачи. При доказательстве регулярности исследованы суммы рядов Фурье. Доказана теорема о существовании и регулярности периодического решения, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности. При доказательстве теоремы проведена априорная оценка решений соответствующего операторного уравнения и применен принцип Лере — Шаудера о неподвижной точке. Получены дополнительные условия, при которых найденное в основной теореме периодическое решение единственно

**Ключевые слова**

*Колебания балки, периодические решения, ряды Фурье, неподвижные точки*

Поступила 03.07.2018


*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.3843.2017/4.6)*

**Введение.** Рассмотрим задачу о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения колебаний балки с закрепленным и шарнирно опертым концами:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,\ t,\ u) + f(x,\ t),\ 0 < x < \pi,\ \ t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0,\ t \in \mathbf{R}; \tag{2}$$

$$u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0,\ t \in \mathbf{R}; \tag{3}$$

$$u(x,\ t + 2\pi) = u(x,\ t);\ \ 0 < x < \pi,\ \ t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Здесь $g(x,\ t,\ u), f(x,\ t)$ — $2\pi$-периодические функции по $t$; $a$ — положительная константа.

Уравнение (1) представляет собой математическую модель колебаний проводов, стержней, способных сопротивляться изгибу, а также двутавровых балок [1]. Проблеме нахождения периодических и квазипериодических решений для нелинейных эволюционных уравнений, таких как волновое уравнение и уравнение колебаний балки, посвящено большое число работ. В работах [2–15] получены условия существования периодических решений для волнового уравнения. Следует отметить большое разнообразие методов, приведенных в указанных работах. Здесь метод [2, 8], разработанный для волнового уравнения, применяется при исследовании уравнения колебаний балки. Задача о колебаниях балки при $a = 0$ изучена в [16–21]. В работе [22] доказано существование локально единственного периодического решения малой амплитуды для уравнения (1), если $a > 0,$ внешняя сила мала и балка шарнирно оперта на левом и правом концах, т. е. на левом и правом концах отрезка выполнены граничные условия типа (2). Уравнение (1) также рассмотрено в работе [23] при $a > 0$ и с граничными условиями типа (2) на обоих концах отрезка. В ней доказано существование неограниченной в $L_p$ последовательности периодических решений, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост без предположения малости правой части уравнения. При выполнении граничных условий типа (2) на обоих концах отрезка задача на собственные значения явно решается, ее собственными функциями являются $\sin(nx),$ соответствующие им собственные значения равны $n^4 + an^2$.

Граничное условие (3) соответствует случаю закрепленного правого конца балки. При изучении уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) собственные значения соответствующей задачи на собственные значения явно не выражаются и удовлетворяют громоздкому трансцендентному уравнению, исследованию которого посвящена первая часть работы.

*Цель работы* — изучение соответствующей линейной задачи $(g = 0)$ и доказательство существования решения задачи (1)–(4) при любой правой части $f$ (из соответствующего пространства), если нелинейное слагаемое $g$ удовлетворяет условию нерезонансности без предположения малости решения и $f$.

**Исследование собственных значений дифференциального оператора уравнения (1).** Для изучения спектральных свойств оператора $\partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ с граничными условиями (2)–(4) рассмотрим следующую задачу на собственные значения и собственные функции (такая задача возникает при решении соответствующей линейной задачи методом разделения переменных Фурье):

$$X^{(4)} - aX'' = \lambda X; \tag{5}$$

$$X(0) = X''(0) = 0; \tag{6}$$

$$X(\pi) = X'(\pi) = 0. \tag{7}$$

Умножив (5) на $X$ и проинтегрировав по отрезку $[0, \pi]$, с учетом граничных условий (6), (7) получим соотношение

$$\lambda \int_0^\pi X^2(x)\, dx = \int_0^\pi (X''(x))^2 dx + a \int_0^\pi (X'(x))^2 dx.$$

Из этого соотношения вытекает положительная определенность дифференциального оператора $\partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ с граничными условиями (6), (7) и неравенство $\lambda \geq 0$. Если предположить, что $\lambda = 0$, то с учетом (6) получим $X'(x) \equiv 0, X(x) \equiv 0$. Это противоречит определению собственной функции. Таким образом, $\lambda > 0$.

Обозначим множества натуральных, целых, действительных чисел $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}$ соответственно.

С учетом условий (6) при $\lambda > 0$ решение уравнения (5) имеет вид

$$X = C_1 \sin\left( x\sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} - a/2} \right) + C_2 \left( x\sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} + a/2} \right).$$

Если подставить в это решение граничные условия (7), то получим линейную однородную систему относительно $C_1, C_2$. Стандартно приравняв определитель этой системы к нулю (что является необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения), запишем уравнение относительно собственных значений

$$\sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} + a/2}\ \mathrm{tg}\left( \pi\sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} - a/2} \right) =$$

$$= \sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} - a/2}\ \mathrm{th}\left( \pi\sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} + a/2} \right).$$

При $\lambda > 0$ обозначим

$$b = \sqrt{\sqrt{a^2/4+\lambda} - a/2},\ c = \sqrt{\sqrt{a^2/4+\lambda} + a/2}. \tag{8}$$

Тогда $c = \sqrt{b^2 + a}$ и

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi b)}{b} = \frac{\operatorname{th}(\pi c)}{c}. \tag{9}$$

Обозначим $f(b) = \operatorname{tg}(\pi b)/b$, $h(c) = \operatorname{th}(\pi c)/c$, $H(b) = h(c(b))$, где $c(b) = \sqrt{b^2+a}$. Легко заметить, что функция $f(b)$ возрастает на промежутках $(0,1/2), (n-1/2, n+1/2)$, $n \in \mathbf{N}$, а функция $H(b)$ убывает при $b \geq 0$. Кроме того, $f(0+0) = \pi$, $H(0) = (\pi\sqrt{a})/\sqrt{a} < \pi$ и при $n \in \mathbf{N}$ выполнены соотношения $f(n) = 0$, $\lim\limits_{b \to n - \frac{1}{2} - 0} f(b) = +\infty$. Поэтому при $n \in N$ на каждом интервале $(n, n+1/2)$ существует единственный корень $b_n$ уравнения (9).

Из уравнения (9) выведем

$$\operatorname{tg}(\pi b_n) = \frac{b_n}{\sqrt{b_n^2 + a}} \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{b_n^2 + a}\right). \tag{10}$$

Правая часть уравнения (10) меньше единицы. Следовательно, $b_n \in (n, n+1/4)$, т. е.

$$b_n = n + 1/4 - \theta_n \tag{11}$$

и $\theta_n \in (0, 1/4)$. Таким образом, согласно (8), (11), собственные значения $\lambda_n$ задачи (5)–(7) выражаются формулой

$$\lambda_n = (n + 1/4 - \theta_n)^4 + a(n + 1/4 - \theta_n)^2. \tag{12}$$

Для того чтобы оценить $\theta_n$, подставим (11) в (10):

$$\frac{1 - \operatorname{tg}(\pi\theta_n)}{1 + \operatorname{tg}(\pi\theta_n)} = g(b_n). \tag{13}$$

Здесь $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + a}} \operatorname{th}(\pi\sqrt{t^2 + a})$. Из (13) выразим

$$\theta_n = \frac{1}{\pi} \frac{\pi\theta_n}{\operatorname{tg}(\pi\theta_n)} \frac{1}{1 + g(b_n)} (1 - g(b_n)).$$

Поскольку $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1 + g(b_n)} < 1$ и при $t \in (0, \pi/4)$ имеет место неравенство $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi\theta_n}{\operatorname{tg}(\pi\theta_n)} < 1$, то

$$\frac{1}{8}(1-g(b_n)) < \theta_n < \frac{1}{\pi}(1-g(b_n)). \tag{14}$$

Преобразуем выражение

$$1-g(t) = \frac{a}{\sqrt{t^2+a}(\sqrt{t^2+a}+t)} + \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}(1-\operatorname{th}(\pi\sqrt{t^2+a})).$$

Следовательно,

$$1-g(b_n) > \frac{a}{\sqrt{b_n^2+a}(\sqrt{b_n^2+a}+b_n)} > \frac{a}{2(b_n^2+a)}$$

и

$$1-g(b_n) < \frac{a}{2b_n^2} + 1 - \operatorname{th}(\pi b_n) = \frac{a}{2b_n^2} + \frac{2}{e^{2\pi b_n}+1} < \frac{a+2}{2b_n^2}.$$

Тогда из (11) и (14) следует

$$\frac{a}{16a+25}\frac{1}{n^2} < \theta_n < \frac{a+2}{2\pi}\frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{15}$$

Соответствующие $\lambda_n$ собственные функции $X_n$ имеют вид

$$X_n = A_n(\sin(b_n x) - \alpha_n \operatorname{sh}(c_n x)), \tag{16}$$

где $b_n = \sqrt{\sqrt{a^2/4+\lambda_n} - a/2}$; $c_n = \sqrt{\sqrt{a^2/4+\lambda_n} + a/2}, A_n > 0$;

$$\alpha_n = \frac{\sin(b_n \pi)}{\operatorname{sh}(c_n \pi)}. \tag{17}$$

Множитель $A_n$ подбирается из условия нормировки $\|X_n\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Прямые вычисления показывают, что $A_n = \sqrt{2/\pi} + \beta_n$ и $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда из (16) вытекает существование не зависящей от $n$ положительной константы $C_0$, такой, что

$$|X_n(x)| \le C_0 \text{ при всех } x \in [0,\pi]. \tag{18}$$

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times R/(2\pi\mathbf{Z})$. Рассмотрим пространства $L_2[0,\pi]$, $L_2(\Omega)$, скалярные произведения в которых заданы формулами

$$(f,g) = \int\limits_{[0,\pi]} f(x)g(x)dx, f,g \in L_2[0,\pi], (u,v) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} u(x,t)v(x,t)\,dx\,dt,\ u,v \in L_2(\Omega)$$

соответственно. Обозначим также $\|f\| = \|f\|_{L_2(\Omega)}$ для $f \in L_2(\Omega)$.

Система функций $\{X_n\}_{n\in N}$ является замкнутой, ортонормированной в $L_2[0,\pi]$ системой [24]. Рассмотрим замкнутую, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}X_n,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}X_n\cos(mt),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}X_n\sin(mt)\right\}_{m,n\in N}. \tag{19}$$

Пусть $D$ — множество конечных линейных комбинаций функций из системы (19). Определим оператор $L_0 : L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, для которого

$$D(L_0)=D \text{ и } L_0\varphi=\varphi_{tt}+\varphi_{xxxx}-a\varphi \text{ при всех } \varphi\in D.$$

Числа $\mu_{nm}=\lambda_n-m^2$ при $n\in\mathbf{N}, m\in Z_+\equiv\mathbf{N}\cup 0$ составляют множество собственных значений оператора $L_0$.

Предположим, что коэффициент $a$ удовлетворяет условиям

$$a>0,\ \ a+1/8\notin\mathbf{N}. \tag{20}$$

**Лемма 1.** *При выполнении условия (20) ядро оператора* $L_0$ *конечномерно.*

◄ Достаточно проверить, что уравнение

$$\mu_{nm}=0 \tag{21}$$

не может иметь бесконечного числа решений при $n\in\mathbf{N},\ m\in Z_+$.

Используя (12), перепишем уравнение (21) в виде

$$m=\left(n+\frac{1}{4}-\theta_n\right)^2\sqrt{1+\frac{a}{(n+1/4-\theta_n)^2}}. \tag{22}$$

Выберем произвольное $\beta\in(0,1/2)$. Отметим, что при $x\in\left(0,\dfrac{1-2\beta}{\beta^2}\right)$ имеет место равенство $\sqrt{1+x}=1+\alpha(x)x$, где $\alpha(x)\in(\beta,1/2)$. Возьмем $n_0\in\mathbf{N}$ такое, что

$$\frac{a}{(n+1/4-\theta_n)^2}<\frac{1-2\beta}{\beta^2}$$

при $n\geq n_0$. Тогда при $n\geq n_0$ из (22) выведем соотношение $m=$ $=(n+1/4-\theta_n)^2+\alpha_1(n)a$, где $\alpha_1(n)\in(\beta,1/2)$. Отсюда получим равенство

$$2m-2n^2-n=R_n+\gamma(n). \tag{23}$$

Здесь

$$\gamma(n)=2\theta_n^2-\theta_n(4n+1);\ R_n=1/8+2\alpha_1(n)a. \tag{24}$$

Из (20) следует, что либо $a \in (k-1/8, k+7/8)$ при некотором $k \in \mathbf{N}$, либо $a \in (0, 7/8)$. В первом случае примем $\beta = ((k-1/8)/a+1)/4$. Тогда при $n \ge n_0$

$$R_n \in \left(\frac{1}{2}\left(a+k+\frac{1}{8}\right),\ a+\frac{1}{8}\right) \subset (k,\ k+1). \tag{25}$$

Во втором случае при $n \in \mathbf{N}$ будем иметь

$$R_n \in \left(\frac{1}{8}, a+\frac{1}{8}\right) \subset (0,1). \tag{26}$$

Согласно (15), $\gamma(n) \to 0$ при $n \to \infty$, тогда и в первом и во втором случаях при $n \ge n_0$ уравнение (23) имеет не более конечного числа целочисленных решений $m$, $n$. Лемма доказана. ►

Стандартно доказывается, что при выполнении условия (20) сопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор $L = L_0^*$ является самосопряженным в $L_2(\Omega)$ [25]. Функция

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt))$$

из $L_2(\Omega)$ принадлежит $D(L)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm}^2 \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right)$$

и для этой функции имеет место соотношение

$$Lu = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm} X_n (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt)).$$

Функции из системы (19) — собственные функции оператора $L$ с собственными значениями $\mu_{nm}$. Кроме того, $\ker L = \ker L_0$, $\operatorname{Im} L = \ker L^{\perp}$.

Обозначим через $H_k(\Omega) = W_2^k(\Omega) (k \in \mathbf{N})$ пространства Соболева.

**Лемма 2.** *Если выполнено условие (20), то оператор* $L^{-1} : \operatorname{Im} L \to \operatorname{Im} L$ *(*$L^{-1}$ *— обратный оператор к сужению* $L : D(L) \cap \operatorname{Im} L \to \operatorname{Im} L$ *) является вполне непрерывным и имеют место включения*

$$L^{-1} f \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega), (L^{-1} f)_x \in C(\Omega) \ \textit{при всех} \ f \in \operatorname{Im} L; \tag{27}$$

$$L^{-1} f \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), (L^{-1} f)_{xx} \in C(\Omega) \ \textit{при всех} \ f \in H_1(\Omega) \cap \operatorname{Im} L. \tag{28}$$

◄ Разложим функцию $f \in \operatorname{Im} L$ в ряд Фурье по системе (19):

$$f = \sum_{\mu_{nm} \ne 0} X_n (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt)). \tag{29}$$

Здесь и далее в аналогичных формулах имеется ввиду двойное суммирование по индексам $(n,\ m \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+,$ для которых $\mu_{nm} \neq 0)$.

Для доказательства вполне непрерывности оператора $L^{-1}$ достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2}.$$

Выразим

$$\left| m - \sqrt{\lambda_n} \right| = \left| m - (n + 1/4 - \theta_n)^2 - \alpha_1(n) a \right| = \frac{1}{2} \left| R_n + \gamma(n) - (2m - 2n^2 - n) \right|.$$

Здесь $R_n, \gamma(n)$ определены в (24). Поскольку $\gamma(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то из (20), (25), (26) следует существование $\varepsilon_0 \in (0, 1/2]$ такого, что

$$\left| m - \sqrt{\lambda_n} \right| \geq \varepsilon_0, \tag{30}$$

если $m \neq \sqrt{\lambda_n}$. Следовательно, при $m \neq \sqrt{\lambda_n}$ имеем

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} = \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\left( m - \sqrt{\lambda_n} \right)^2 \left( m + \sqrt{\lambda_n} \right)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left( m - \sqrt{\lambda_n} \right)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \sum_{m=0}^{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]} \frac{1}{\left( \sqrt{\lambda_n} - m \right)^2} + \sum_{m=\left[\sqrt{\lambda_n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(m - \sqrt{\lambda_n})^2} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \sum_{m=0}^{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]} \frac{1}{\left( \left[ \sqrt{\lambda_n} \right] + \varepsilon_0 - m \right)^2} + \sum_{m=\left[\sqrt{\lambda_n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{\left( m - \left[ \sqrt{\lambda_n} \right] - (1 - \varepsilon_0) \right)^2} \right) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m - (1 - \varepsilon_0))^2} < \infty.$$

Используя (30) и (12), получаем оценку

$$|\mu_{nm}| \geq \varepsilon_0 (m + n^2) \tag{31}$$

при $m \neq \sqrt{\lambda_n}$. Разложение функции $u = A^{-1} f$ в ряд Фурье имеет вид

$$u = \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}} X_n (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt)).$$

Используя (31), при $m \neq \sqrt{\lambda_n}$ получаем ограниченность последовательности $\left\{ \dfrac{m}{|\mu_{nm}|} \right\}$ и включение $u_t \in L_2(\Omega)$. Из (16) и ограниченности последовательности $\{A_n\}$ вытекает существование положительных констант $D_k$, $k \in \mathbf{N}$, таких, что

$$\left| X_n^{(k)}(x) \right| \leq D_k n^k \text{ при всех } x \in [0, \pi].$$

Таким образом, для доказательства включений $u \in C(\Omega)$, $u_x \in C(\Omega)$ достаточно установить сходимость ряда

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n}{|\mu_{nm}|} (|a_{nm}| + |b_{nm}|). \tag{32}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского (12), (30), выведем

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n}{|\mu_{nm}|} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq \left( \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n^2}{\mu_{nm}^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \left( a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) \right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n^2}{\left( m - \sqrt{\lambda_n} \right)^2 \left( m + \sqrt{\lambda_n} \right)^2}.$$

$$\|f\| \leq \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\left( m - \sqrt{\lambda_n} \right)^2} \leq \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\left( m - (1 - \varepsilon_0) \right)^2} < \infty.$$

Докажем включения (28). Если $f \in H_1(\Omega) \cap \operatorname{Im} L$ и разложена в ряд (29), то

$$f_t = \sum_{\mu_{nm} \neq 0} m X_n (-a_{nm} \sin(mt) + b_{nm} \cos(mt)) \tag{33}$$

и

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} m^2 \left( a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) < \infty. \tag{34}$$

Отсюда выведем

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{|m|}{|\mu_{nm}|} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq$$

$$\leq \left( \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{\mu_{nm} \neq 0} m^2 \left( a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) \right)^{1/2} < \infty.$$

Поэтому $u_t \in C(\Omega)$, $u \in C^1(\Omega)$.

Использовав (27), (33), (34), выведем $u_{tx}=(L^{-1}f_t)_x\in C(\Omega)$. Для доказательства включения $u_{xx}\in C(\Omega)$ достаточно установить сходимость ряда

$$I=\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{n^2}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}|+|b_{nm}|).$$

Этот факт устанавливается аналогично доказательству сходимости соответствующего ряда в лемме 1.2, приведенной в работе [23] (здесь получено более сильное утверждение о сходимости ряда

$$I=\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{n^3}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}|+|b_{nm}|)).$$

Лемма доказана. ►

**Теорема о существовании решений задачи (1)–(4)**. *Пусть нелинейное слагаемое* $g$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$g\in C^1(\Omega\times R)\ \textit{и}\ 2\pi\textit{-периодична по}\ t; \qquad (35)$$

*Существуют константы* $\alpha,\beta,r$ *такие, что* $r>0$ *и*

$$\alpha\le\frac{g(x,t,u)}{u}\le\beta\ \ \textit{при}\ \ u\in(-\infty,-r]\cup[r,+\infty),(x,t)\in\Omega. \qquad (36)$$

**Определение.** *Обобщенным решением задачи (1)–(4) называется функция* $u\in L_2(\Omega)$ *такая, что*

$$\int_\Omega u(\varphi_{tt}+\varphi_{xxxx}-a\varphi_{xx})\,dx\,dt=\int_\Omega (g(x,t,u)+f)\varphi\,dx\,dt\quad \textit{для всех}\quad \varphi\in D.$$

Обозначим $\sigma=\{\mu_{nm}\,|\,n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}_+\}$. Из леммы 1 и неравенства (31) следует, что $\sigma$ не имеет конечных предельных точек.

**Теорема.** *Предположим выполнены условия (20), (35), (36) с константами* $\alpha,\beta,r$ *такими, что* $r>0$, $\alpha<\beta$ *и* $[\alpha,\beta]\cap\sigma=\varnothing$. *Тогда для любой функции* $f\in H_1(\Omega)$ *задача (1)–(4) имеет обобщенное решение* $u\in H_2(\Omega)\cap C^1(\Omega)$, $u_{xx}\in C(\Omega)$ *и граничные условия (2), (3) выполнены в классическом смысле.*

◄ Будем опираться на метод Брезиса — Ниренберга [2] и использовать план работы [8]. Обозначим $h(x,t,u)=g(x,t,u)-\alpha u$. Из леммы 2 следует вполне непрерывность оператора $L^{-1}:\operatorname{Im}L\to\operatorname{Im}L$. Поскольку $\alpha\notin\sigma$, то $(L-\alpha I)^{-1}:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ также является вполне непрерывным оператором. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu_{nm}-\alpha)^2}=\frac{k}{\alpha^2}+\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{\mu_{nm}^2(1-\alpha/\mu_{nm})^2}.$$

Здесь $k = \dim \ker L$. Поскольку $\alpha \notin \sigma$, из неравенства (31) следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что $(1 - \alpha / \mu_{nm})^2 \geq \varepsilon_1 > 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}_+$ таких, что $\mu_{nm} \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm} - \alpha)^2} \leq \frac{k}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} < \infty.$$

Обобщенное решение задачи (1)–(4) будем искать как решение операторного уравнения

$$Lu - g(x, t, u) = f. \tag{37}$$

Если обозначить $T(u) = (L - \alpha I)^{-1}(h(x, t, u) + f)$, то уравнение (37) можно переписать в виде

$$u = T(u). \tag{38}$$

Оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным оператором. Рассмотрим уравнение

$$u = \mu T(u) \tag{39}$$

с параметром $\mu \in (0, 1]$. Оценим $L_2$-норму возможных решений уравнения (39), для чего обозначим $v = (L - \alpha I)^{-1} f$ и приведем уравнение (39) к виду

$$h(x, t, u) = -\frac{1}{\mu}(\alpha I - L)(u - \mu v). \tag{40}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma$ так, что $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \varnothing$ и $[\alpha, \beta] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$. Умножим равенство (40) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u - \mu v$ и воспользуемся тем, что $\alpha - \lambda_2$ есть наименьшее по модулю отрицательное собственное значение оператора $\alpha I - L$:

$$(h(x, t, u),\ u - \mu v) = -\frac{1}{\mu}((\alpha I - L)(u - \mu v),\ u - \mu v) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(\lambda_2 - \alpha)} \left\| (\alpha I - L)(u - \mu v) \right\|^2 = \frac{\mu}{\lambda_2 - \alpha} \left\| h(x, t, u) \right\|^2. \tag{41}$$

Используя условие (36), выведем существование положительных констант $C_1, C_2$ таких, что

$$h(x, t, u)u \geq -C_2,\ \left| h(x, t, u) \right| \leq (\beta - \alpha) \left| u \right| + C_1\ \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbf{R}.$$

Из данных неравенств и (40) следует

$$\frac{\mu}{\lambda_2-\alpha}\|h(x,t,u)\|^2 \ge \int_\Omega |h(x,t,u)|\cdot|u|\,dxdt - \|v\|\cdot\|h(x,t,u)\| - 4\pi^2 C_2 \ge$$

$$\ge \frac{1}{\beta-\alpha}\|h(x,t,u)\|^2 - C_3\|h(x,t,u)\| - 4\pi^2 C_2,$$

где $C_3 = \| v \| + \pi\sqrt{2}\,\frac{C_1}{\beta-\alpha}$. Поскольку $\lambda_2-\alpha > \beta-\alpha$, отсюда и (40) вытекают оценки

$$\|h(x,t,u)\| \le C_4,\ \|(L-\alpha I)(u-\mu v)\| \le C_4,$$

где константа $C_4$ не зависит от $\mu$. Поскольку $\alpha \notin \sigma$, из последнего неравенства получим $\|u\| \le C_5$ и $C_5$ не зависит от $\mu$. Из полученной оценки и теоремы Лере — Шаудера [26, с. 417] следует существование решения $u \in L_2(\Omega)$ уравнения (38). Утверждение о гладкости обобщенного решения вытекает из конечномерности $\ker L$ и леммы 2. ►

**Замечание.** *Пусть дополнительно условиям теоремы функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет условию*

$$\alpha \le g'_u(x,t,u) \le \beta \ \ \textit{при всех}\ \ u \in \mathbf{R}, (x,t) \in \Omega. \qquad (42)$$

*Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение.*

Действительно, предположим $u_1, u_2$ есть решения уравнения (37). Тогда

$$(-L+\alpha I)u_1 + h(x,t,u_1) = -f, \qquad (43)$$

$$(-L+\alpha I)u_2 + h(x,t,u_2) = -f. \qquad (44)$$

Из (42) выведем

$$0 \le (h(x,t,u)-h(x,t,v))(u-v) \le (\beta-\alpha)(u-v)^2 \qquad (45)$$

при всех $u, v \in \mathbf{R}, (x,t) \in \Omega$.

Вычтем из (43) соотношение (44), полученное равенство умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_1-u_2$:

$$0 = ((L-\alpha I)(u_1-u_2), u_1-u_2) + (h(x,t,u_1)-h(x,t,u_2), u_1-u_2). \qquad (46)$$

Из неравенства (45) следует

$$(h(x,t,u_1)-h(x,t,u_2))(u_1-u_2) \ge \frac{1}{\beta-\alpha}(h(x,t,u_1)-h(x,t,u_2))^2 \qquad (47)$$

при всех $(x,t) \in \Omega$.

С учетом того, что $(\alpha-\lambda_2)$ — наибольшее отрицательное собственное значение оператора $\alpha I - L$, из (46), (47) получим

$$0 \geq -\frac{1}{\lambda_2-\alpha}\|(\alpha I-L)(u_1-u_2)\|^2+\frac{1}{\beta-\alpha}\|h(x,t,u_1)-h(x,t,u_2)\|^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\lambda_2-\alpha}\right)\|(\alpha I-L)(u_1-u_2)\|^2.$$

Следовательно, $(\alpha I-L)(u_1-u_2)=0,\ u_1=u_2$.

**Заключение.** Исследована задача о периодических решениях квазилинейного уравнения вынужденных колебаний двутавровой балки с закрепленным и свободно опертым концами. Получена асимптотика собственных значений для соответствующей одномерной задачи на собственные значения, доказана лемма о гладкости в $H_2 \cap C^1$ периодических решений линейной задачи. Доказана теорема о существовании периодического решения для квазилинейного уравнения колебаний двутавровой балки в случае, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности. Получены достаточные условия, при которых данное периодическое решение единственно.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ванько В.И. О собственных частотах колебаний проводов воздушных ЛЭП. *Известия вузов. Энергетика*, 1987, № 8, с. 7–12.

[2] Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 1978, vol. 5, no. 2, pp. 225–325.

[3] Tanaka K. Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt}-u_{xx}\pm|u|^{p-1}u=$ $=f(x,t)$. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 307, pp. 615–645.
DOI: 10.1090/S0002-9947-1988-0940220-X

[4] Berti M., Biasco L. Forced vibrations of wave equations with nonmonotone nonlinearities. *Annales de l'I.H.P. Analyse non Linéaire,* 2006, vol. 23, no. 4, pp. 439–474.
DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[5] Berti M., Baldi P. Forced vibrations of a nongomogeneous string. *SIAM J. Math. Anal.*, 2008, vol. 40, iss. 1, pp. 382–412. DOI: 10.1137/060665038

[6] Berti M., Bolle P. Cantor families of periodic solutions of wave equations with $C^k$ nonlinearities. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2008, vol. 15, iss. 1-2, pp. 247–276.
DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[7] Berti M., Biasco L., Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2014, vol. 212, iss. 3, pp. 905–955.
DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[8] Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами. *Математический сборник*, 2007, т. 198, № 7, с. 91–108.

[9] Ji S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with $x$-dependent coefficients. *Calc. Var*., 2008, vol. 32, iss. 2, pp. 137–153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[10] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. *JDE*, 2018, vol. 264, iss. 9, pp. 5527–5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[11] Ji S., Li Y. Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation. *Arch. Rational Mech. Anal*., 2011, vol. 199, iss. 2, pp. 435–451.
DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[12] Ji S., Gao Y., Zhu W. Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet — Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation. *Adv. Nonlinear Stud*., 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 765–773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[13] Chen J. Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients. *Z. Angew. Math. Phys*., 2015, vol. 66, iss. 5, pp. 2095–2107.
DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[14] Chen J., Zhang Z. Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball. *Calc. Var.,* 2017, vol. 56, iss. 58, pp. 3–27.
DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[15] Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *J. Differ. Equ*., 2006, vol. 230, iss. 1, pp. 213–274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[16] Eliasson L.H., Grébert B., Kuksin S.B. KAM for the nonlinear beam equation. *Geom. Funct. Anal*., 2016, vol. 26, iss. 6, pp. 1588–1715.
DOI: 10.1007/s00039-016-0390-7

[17] Elishakoff I., Johnson V. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass. *J. Sound Vib*., 2005, vol. 286, iss. 4-5, pp. 1057–1066. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.01.050

[18] Elishakoff I., Pentaras D. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. *J. Sound Vib*., 2006, vol. 298, iss. 1-2, pp. 439–445. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.05.028

[19] Wang Y., Si J. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term. *Z. Angew. Math. Phys.,* 2012, vol. 63, iss. 1, pp. 189–190. DOI: 10.1007/s00033-011-0172-x

[20] Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. *Дифференциальные уравнения*, 2012, т. 48, № 6, с. 814–825.

[21] Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. *Известия РАН. Сер. Матем*., 2015, т. 79, № 5, с. 215–238. DOI: 10.4213/im8250

[22] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1995, vol. 38, pp. 519–538.

[23] Рудаков И.А. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки. *Дифференциальные уравнения*, 2018, т. 54, № 5, с. 691–700.

[24] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[25] Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М., Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1983.

[26] Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

**Рудаков Игорь Алексеевич** — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), доцент кафедры «Прикладная математика, информационные технологии и электротехника» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Рудаков И.А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 3, с. 4–21. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21

## OSCILLATION PROBLEM FOR AN I-BEAM WITH FIXED AND HINGED END SUPPORTS

**I.A. Rudakov** rudakov_ia@mail.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**
**Moscow Aviation Institute (National Research University),**
**Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

The paper investigates the problem concerning time-periodic solutions to a quasi-linear equation describing forced oscillations of an I-beam with fixed and hinged end supports. The non-linear term and the right side of the equation are time-periodic functions. We seek a Fourier series solution to the equation. In order to construct an orthonormal system, we studied the eigenvalue problem for a differential operator representing the original equation. We estimated the roots of the respective transcendental equation while investigating eigenvalue asymptotic of this problem. We derived conditions under which the differential operator kernel is finite-dimensional and the inverse operator is

**Keywords**

*Beam oscillations, periodic solutions, Fourier series, fixed points*

completely continuous over the complement to the kernel. We prove a lemma on existence and regularity of solutions to the respective linear problem. The regularity proof involved studying the sums of Fourier series. We prove a theorem on existence and regularity of a periodic solution when the non-linear term satisfies a non-resonance condition at infinity. The proof included prior estimation of solutions to the respective operator equation and made use of the Leray — Schauder fixed point theorem. We determine additional conditions under which the periodic solution found via the main theorem is a singular solution

Received 03.07.2018


*The study was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project no. 1.3843.2017/4.6)*

## REFERENCES

[1] Van'ko V.I. About natural frequencies of oscillations of wires of overhead transmission lines. *Izvestiya vuzov, Energetika*, 1987, no. 8, pp. 7–12 (in Russ.).

[2] Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 1978, vol. 5, no. 2, pp. 225–325.

[3] Tanaka K. Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{p-1} u = f(x,t)$. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 307, pp. 615–645. DOI: 10.1090/S0002-9947-1988-0940220-X

[4] Berti M., Biasco L. Forced vibrations of wave equations with nonmonotone nonlinearities. *Annales de l'I.H.P. Analyse Non Linéaire*, 2006, vol. 23, no. 4, pp. 439–474. DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[5] Berti M., Baldi P. Forced vibrations of a nongomogeneous string. *SIAM J. Math. Anal.*, 2008, vol. 40, no. 1, pp. 382–412. DOI: 10.1137/060665038

[6] Berti M., Bolle P. Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2008, vol. 15, iss. 1-2, pp. 247–276. DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[7] Berti M., Biasco L., Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2014, vol. 212, iss. 3, pp. 905–955. DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[8] Rudakov I.A. Periodic solutions of a quasilinear wave equation with variable coefficients. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 993–1009. DOI: 10.1070/SM2007v198n07ABEH003870

[9] Ji S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with $x$-dependent coefficients. *Calc. Var.*, 2008, vol. 32, iss. 2, pp. 137–153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[10] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. *JDE*, 2018, vol. 264, iss. 9, pp. 5527–5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[11] Ji S., Li Y. Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2011, vol. 199, iss. 2, pp. 435–451. DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[12] Ji S., Gao Y., Zhu W. Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet — Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation. *Adv. Nonlinear Stud.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 765–773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[13] Chen J. Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, vol. 66, iss. 5, pp. 2095–2107. DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[14] Chen J., Zhang Z. Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball. *Calc. Var.*, 2017, vol. 56, iss. 58, pp. 3–27. DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[15] Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *J. Differ. Equ.*, 2006, vol. 230, iss. 1, pp. 213–274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[16] Eliasson L.H., Grebert B., Kuksin S.B. KAM for the nonlinear beam equation. *Geom. Funct. Anal.*, 2016, vol. 26, iss. 6, pp. 1588–1715. DOI: 10.1007/s00039-016-0390-7

[17] Elishakoff I., Johnson V. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass. *J. Sound Vib.*, 2005, vol. 286, iss. 4-5, pp. 1057–1066. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.01.050

[18] Elishakoff I., Pentaras D. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 298, iss. 1-2, pp. 439–445. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.05.028

[19] Wang Y., Si J. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2012, vol. 63, iss. 1, pp. 189–190. DOI: 10.1007/s00033-011-0172-x

[20] Rudakov I.A. Periodic solutions of the quasilinear beam vibration equation with homogeneous boundary conditions. *Diff. Equat.,* 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 820–831. DOI: 10.1134/S0012266112060067

[21] Rudakov I.A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibrations with homogeneous boundary conditions. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 1064–1086. DOI: 10.1070/IM2015v079n05ABEH002772

[22] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1995, vol. 38, pp. 519–538.

[23] Rudakov I.A. On periodic solutions of a beam vibration equation. *Diff. Equat.* 2018, vol. 54, iss. 5, pp. 687–695. DOI: 10.1134/S0012266118050117

[24] Naymark M.A. Lineynye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2010.

[25] Berezin F.A., Shubin M.A. Uravnenie Shredingera [Schrödinger equation]. Moscow, Lomonosov MSU Publ., 1983.

[26] Trenogin V.A. Funktsional'nyy analiz [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980.

**Rudakov I.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Information Technologies and Electrical Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Rudakov I.A. Oscillation problem for an I-beam with fixed and higed end supports. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 3, pp. 4–21 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21