УДК 539.3 DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-46-59

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ КЛАССОВ СИММЕТРИИ C_∞ И $C_{\infty h}$

С.В. Цветков sergejtsvetkov@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Трансверсально-изотропные материалы имеют ось симметрии бесконечного порядка. В зависимости от того, какие еще элементы симметрии имеет структура материала, трансверсально-изотропные материалы подразделяют на пять классов. Для таких материалов рассмотрены определяющие соотношения, которые связывают два симметричных тензора второго ранга. Свойства материалов этих пяти классов описаны двумя типами определяющих соотношений. Получено выражение тензорной функции для определяющих соотношений материалов классов C_∞ и $C_{\infty h}$. При этом использованы следствия из принципа симметрии Кюри. Это позволяет получить полный и неприводимый вид тензорной функции

Ключевые слова

Трансверсальная изотропия, симметрия структуры, тензорные функции, инварианты, принцип симметрии, трансверсально-изотропный материал

Поступила 26.08.2018

Введение. Определяющие соотношения (*constitutive relations*) устанавливают наиболее общие связи между воздействиями на среду (тело) и откликами на это воздействие [1]. В механике твердого деформированного тела часто встречаются определяющие соотношения, связывающие два симметричных тензора второго ранга [1–11], вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}\,(\mathbf{T}) \tag{1}$$

или

$$E_{ij} = F_{ij}\left(T_{kl}\right),\ i, j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,$$

где величины E_{ij}, T_{kl} могут быть тензорами или девиаторами деформаций, тензорами скоростей деформаций, тензорами или девиаторами напряжений.

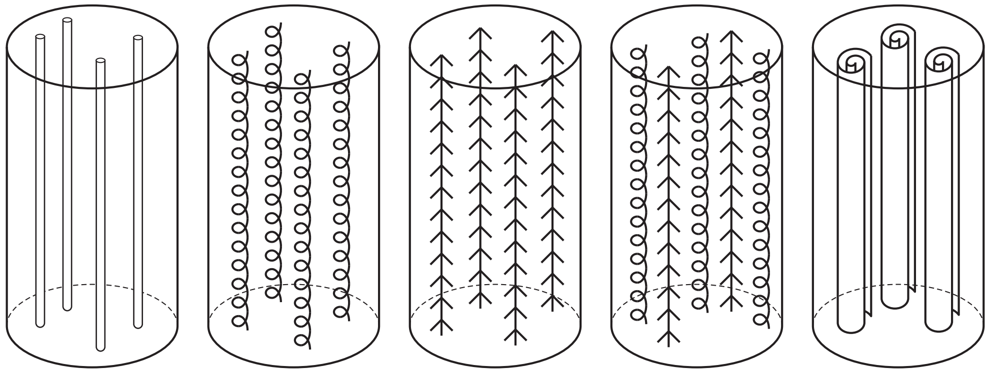
Во многих случаях рассматриваются анизотропные среды, для описания свойств которых применяют анизотропные тензорные функции (1).

Первопричиной анизотропии всех свойств материала является строение структуры материала. Для кристаллов — вид кристаллической решетки, для композитов — тип армирования, для конструкционных металлов — измененная геометрия зерна в результате обработки давлением и т. п. Точечные элементы симметрии (оси и плоскости симметрии) характеризуют строение структуры материала и образуют группу симметрии структуры материала. Вид анизотропии тензорной функции, описывающей свойства среды, зависит от вида анизотропии среды, но не обязательно совпадает с ней.

Цель работы — рассмотрение определяющих соотношений вида (1) для трансверсально-изотропных материалов.

О симметрии структуры трансверсально-изотропных материалов и симметрии трансверсально-изотропных тензорных функций. Трансверсально-изотропные материалы имеют ось симметрии бесконечного порядка и могут обладать и другими элементами симметрии. В зависимости от того, какие это элементы, трансверсально-изотропные материалы подразделяют на пять классов [11, 12]. Обозначение этих классов по Шенфлису: D_∞, $D_{\infty h}$, C_∞, $C_{\infty v}$, $C_{\infty h}$.

Трансверсально-изотропные материалы различных классов симметрии можно получить, армируя изотропную матрицу длинными параллельными элементами, равномерно распределенными по объему (рисунок).



а *б* *в* *г* *д*

Примеры трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры

Материал класса симметрии $D_{\infty h}$ можно получить армированием волокнами круглого поперечного сечения (рисунок, *а*). Такой материал имеет ось симметрии бесконечного порядка, бесконечное число плоскостей симметрии, проходящих через эту ось, плоскость симметрии, перпендикулярную этой оси, бесконечное число осей второго порядка, перпендикулярных оси бесконечного порядка, центр симметрии.

У материала класса симметрии D_∞ армирование проводится правыми спиралями (рисунок, *б*). Элементы симметрии структуры этого материала: ось симметрии бесконечного порядка и бесконечное число осей второго порядка, перпендикулярных оси бесконечного порядка.

Для материала класса $C_{\infty v}$ армирование осуществляется волокнами типа елочка (рисунок, *в*). Такой материал, кроме оси бесконечного порядка, имеет бесконечное число плоскостей симметрии, проходящих через эту ось.

Для армирования материала C_∞ используют правые спирали и волокна типа елочки (рисунок, *г*). У этого материала нет других элементов симметрии, кроме поворотной оси симметрии бесконечного порядка.

Для материала класса $C_{\infty h}$ армирование проводится «рулонами» (рисунок, *д*). Элементы симметрии этого материала: ось симметрии бесконечного порядка, перпендикулярная к ней плоскость симметрии, центр симметрии.

Можно утверждать также о свойствах симметрии для тензоров и тензорных функций [12–15].

Тензор обладает элементом симметрии, если после преобразования с матрицей Q_{ij}, соответствующей этому преобразованию, каждый компонент тензора преобразуется в себя. Например, если для тензора второго ранга выполняются равенства

$$A'_{ij} = Q_{in}Q_{jm}A_{nm} \text{ и } A'_{ij} = A_{ij}, \tag{2}$$

то ортогональное преобразование с матрицей Q_{ij} представляет собой элемент симметрии тензора A_{ij}.

Эти преобразования образуют группу симметрии тензора G_A. Такую симметрию тензора иногда называют внешней симметрией тензора в отличие от симметрии тензора по индексам, которую называют внутренней симметрией [12]. Иногда говорят, что тензор индифферентен относительно группы G_A [15].

Соотношения (2) накладывают ограничения на компоненты индифферентных тензоров.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — ортогональный базис. В работе [13] показано, что для симметричного тензора второго ранга вида

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{e}_3$, является плоскостью симметрии этого тензора. Тензор вида

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

индифферентен относительно группы $D_{\infty h}$ (ось трансверсальной изотропии совпадает с $\mathbf{e}_3$) [13].

Если для некоторого ортогонального преобразования с матрицей M_{ij} для тензорной функции вида (1) выполняется соотношение

$$M_{in} M_{jm} E_{nm} = F_{ij}\left(M_{kn} M_{lm} T_{nm} \right), \tag{3}$$

то это ортогональное преобразование является элементом симметрии функции F_{ij}. Совокупность всех ортогональных преобразований, удовлетворяющих (3), образует группу симметрии тензорной функции (1) G_{Π}.

Принцип симметрии, сформулированный П. Кюри, гласит: «когда определенные причины вызывают определенные следствия, то элементы симметрии причин должны проявляться в вызванных ими следствиях» [16]. Поэтому элементы симметрии структуры материала должны входить в набор элементов симметрии функции (1).

Из принципа Кюри следует $G_{\Pi} \supseteq G_S$. Здесь G_{Π} — группу симметрии тензорной функции, описывающей свойства материала с группой симметрии структуры G_S, и

$$G_E \supseteq G_T \cap G_{\Pi}, \tag{4}$$

где G_E, G_T — группы симметрии тензоров $\mathbf{E}$ и $\mathbf{T}$ в выражении (1).

Отметим, что преобразование инверсии, т. е. преобразование с матрицей

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

является элементом симметрии функции (1). Это следует из того, что как функция, так и аргумент функции — тензоры четного ранга. Поэтому для определения группы симметрии функции (1) для какого-либо вида трансверсально-изотропного материала к ортогональным преобразованиям класса симметрии структуры материала необходимо добавить преобразование инверсии. Таким образом, для материалов класса симметрии $D_{\infty h}$, D_{∞}, $C_{\infty v}$ группа симметрии функции (1) — $D_{\infty h}$. Для материалов классов C_{∞} и $C_{\infty h}$ — $C_{\infty h}$.

Анизотропная тензорная функция с группой симметрии G_Π может быть представлена в виде [3]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{T}) = \varphi_1\mathbf{H}_1 + \varphi_2\mathbf{H}_2 + \ldots + \varphi_n\mathbf{H}_n, \tag{5}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — скалярные функции тензора $\mathbf{T}$, инвариантные относительно группы G_Π; $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_n$ — симметричные тензоры второго ранга, являющиеся либо тензорами-константами, либо линейными или квадратичными функциями тензора $\mathbf{T}$. Тензоры $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_n$ (*generators*) являются форм-инвариантами относительно группы G_Π. Выражение (5) будет неприводимым, если среди тензоров $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_n$ нет таких, которые могут быть выражены как линейные комбинации остальных с коэффициентами, являющимися скалярными функциями тензора $\mathbf{T}$, инвариантными относительно G_Π.

Определяющие соотношения класса симметрии $D_{\infty h}$ рассмотрены, например, в работах [3, 6–11] и др.

Полное и неприводимое представление функции (1) группы симметрии $D_{\infty h}$ в ортогональном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где вектор $\mathbf{e}_3$ направлен по оси трансверсальной изотропии, получено в виде

$$\mathbf{E} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{T} + \alpha_3\mathbf{T}^2 + \alpha_4(\mathbf{MT} + \mathbf{TM}) + \alpha_5(\mathbf{MT}^2 + \mathbf{T}^2\mathbf{M}). \tag{6}$$

Здесь $\alpha_0, \ldots, \alpha_5$ — скалярные функции пяти инвариантов, составляющие функциональный базис относительно группы $D_{\infty h}$ ($\mathrm{tr}\mathbf{T} = T_{ii}$ — след тензора $\mathbf{T}$):

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{T},\ I_2 = \mathrm{tr}\mathbf{T}^2,\ I_3 = \mathrm{tr}\mathbf{T}^3,\ I_4 = \mathrm{tr}\mathbf{MT},\ I_5 = \mathrm{tr}\mathbf{MT}^2;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$\mathbf{T}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2 & T_{11}T_{12} + T_{12}T_{22} + T_{13}T_{23} & T_{11}T_{13} + T_{12}T_{23} + T_{13}T_{33} \\ T_{11}T_{12} + T_{12}T_{22} + T_{13}T_{23} & T_{12}^2 + T_{22}^2 + T_{23}^2 & T_{12}T_{13} + T_{22}T_{23} + T_{23}T_{33} \\ T_{11}T_{13} + T_{12}T_{23} + T_{13}T_{33} & T_{12}T_{13} + T_{22}T_{23} + T_{23}T_{33} & T_{13}^2 + T_{23}^2 + T_{33}^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{MT}+\mathbf{TM}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & 2T_{33} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{MT}^2+\mathbf{T}^2\mathbf{M}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & T_{11}T_{13}+T_{33}T_{13}+T_{12}T_{23} \\ 0 & 0 & T_{22}T_{23}+T_{33}T_{23}+T_{12}T_{13} \\ T_{11}T_{13}+T_{33}T_{13}+T_{12}T_{23} & T_{22}T_{23}+T_{33}T_{23}+T_{12}T_{13} & 2\left(T_{13}^2+T_{23}^2+T_{33}^2\right) \end{pmatrix}.$$

Трансверсально-изотропной функции вида (1) для группы симметрии $C_{\infty h}$ уделялось значительно меньше внимания. Можно отметить работу [17], где для всех пяти групп симметрии приведены трансверсально-изотропные функции векторов, симметричных тензоров второго ранга и кососимметричных тензоров второго ранга.

Построение трансверсально-изотропной тензорной функции класса симметрии $C_{\infty h}$. Для некоторых групп анизотропные тензорные функции могут быть получены с использованием теоремы «изотропизации» [3, 10]. Согласно этой теореме, анизотропная тензорная функция класса симметрии G тензорного аргумента $\mathbf{T}$ может быть выражена как изотропная тензорная функция этого тензорного аргумента и набора структурных тензоров, характеризующих группу G, т. е.

$$\mathbf{F}_{\text{а}}(\mathbf{T}) \equiv \mathbf{F}_{\text{и}}(\mathbf{T}, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_k),$$

где $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_k$ — набор структурных тензоров, т. е. тензоров, имеющих совокупную группу симметрии G [18].

Тензор, как показано в работах [13, 14],

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

имеет симметрию группы $C_{\infty h}$, при этом ось трансверсальной изотропии совпадает с вектором $\mathbf{e}_3$.

Изотропную тензорную функцию двух переменных $\mathbf{E} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{T}, \mathbf{W})$ можно рассматривать как анизотропную функцию группы симметрии $C_{\infty h}$ переменной $\mathbf{T}$.

Для нахождения изотропной тензорной функции используем результаты по изотропным скалярным, векторным и тензорным функциям аргументов, которыми являются векторы, симметричные и кососимметричные тензоры второго ранга [10].

Общий вид этой функции

$$\mathbf{E} = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{T} + \beta_2\mathbf{T}^2 + \beta_3\mathbf{W}^2 + \beta_4(\mathbf{TW} - \mathbf{WT}) + \beta_5(\mathbf{TW}^2 + \mathbf{W}^2\mathbf{T}) +$$
$$+ \beta_6(\mathbf{T}^2\mathbf{W} - \mathbf{WT}^2) + \beta_7(\mathbf{WTW}^2 - \mathbf{W}^2\mathbf{TW}). \qquad (9)$$

Здесь $\beta_0, \ldots, \beta_7$ — функции инвариантов тензора $\mathbf{T}$, входящих в функциональный базис относительно группы $C_{\infty h}$. Базис из шести инвариантов приведен в работах [17, 19, 20]:

$$\begin{gathered} J_1 = \mathrm{tr}\mathbf{T},\ J_2 = \mathrm{tr}\mathbf{T}^2,\ J_3 = \mathrm{tr}\mathbf{T}^3,\ J_4 = \mathrm{tr}(\mathbf{TW}^2), \\ J_5 = \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{W}^2),\ J_6 = \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{W}^2\mathbf{TW}) \end{gathered} \qquad (10)$$

или базис, эквивалентный этому. Инварианты (10) связаны сизигией [21]

$$[2J_3 + 4(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)(J_5 + J_2) - 3J_4J_5 - J_4^3]^2 +$$
$$+ 9[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2]^2[J_4^2 + 2J_2 + 4J_5 - 2(J_1 + J_4)^2] + 36J_6^2 = 0,$$

поэтому инвариант J_6 может быть выражен через инварианты $J_1, \ldots, J_5$ с точностью до знака. Функциональный базис инвариантов тензора $\mathbf{T}$ для группы $C_{\infty h}$ упрощается, и можно полагать, что функциональный базис состоит из инвариантов $J_1, \ldots, J_5$ и инварианта Y. Инвариант Y может принимать значения

$$Y = 1\,(\text{если } \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{W}^2\mathbf{TW}) \ge 0);\ Y = -1\ (\text{если } \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{W}^2\mathbf{TW}) < 0).$$

При значении тензора $\mathbf{W}$, заданным соотношением (8),

$$J_1 = I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33};$$
$$J_2 = I_2 = T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{33}^2 + 2(T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2);$$
$$J_3 = I_3 = T_{11}^3 + T_{22}^3 + T_{33}^3 + 3T_{11}(T_{12}^2 + T_{13}^2) + 3T_{22}\left(T_{12}^2 + T_{23}^2\right) +$$
$$+ 3T_{33}\left(T_{13}^2 + T_{23}^2\right) + 6T_{12}T_{13}T_{23};$$
$$J_4 = I_4 - I_1 = -T_{11} - T_{22};$$
$$J_5 = I_5 - I_2 = -T_{11}^2 - 2T_{12}^2 - T_{22}^2 - T_{23}^2 - T_{13}^2;$$
$$\mathrm{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{W}^2\mathbf{TW}) = -T_{12}T_{13}^2 - T_{22}T_{13}T_{23} + T_{11}T_{13}T_{23} + T_{12}T_{23}^2.$$

Таким образом, базис инвариантов, приведенный в работах [17, 19, 20], может быть упрощен.

Используемый метод построения анизотропной тензорной функции имеет недостаток — соотношение (9) может содержать лишние слагаемые. Покажем, что в (9) достаточно оставить только шесть слагаемых, для чего запишем условия линейной независимости шести тензоров:

$$\mathbf{I},\ \mathbf{T},\ \mathbf{T}^2,\ \mathbf{W}^2,\ \mathbf{TW}-\mathbf{WT},\ \ \mathbf{T}^2\mathbf{W}-\mathbf{WT}^2. \qquad (11)$$

Выражение этих тензоров через компоненты даются соотношениями (7) и

$$\mathbf{W}^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{TW}-\mathbf{WT}=\begin{pmatrix}2T_{12} & T_{22}-T_{11} & T_{23}\\ T_{22}-T_{11} & -2T_{12} & -T_{13}\\ T_{23} & -T_{13} & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}^2\mathbf{W}-\mathbf{WT}^2=$$

$$=\begin{pmatrix}2\left(T_{11}T_{12}+T_{12}T_{22}+T_{13}T_{23}\right) & -T_{11}^2-T_{13}^2+T_{22}^2+T_{23}^2 & T_{12}T_{13}+T_{22}T_{23}+T_{23}T_{33}\\ -T_{11}^2-T_{13}^2+T_{22}^2+T_{23}^2 & -2\left(T_{12}T_{11}+T_{22}T_{12}+T_{23}T_{13}\right) & -T_{13}T_{11}-T_{23}T_{12}-T_{33}T_{13}\\ T_{12}T_{13}+T_{22}T_{23}+T_{23}T_{33} & -T_{13}T_{11}-T_{23}T_{12}-T_{33}T_{13} & 0\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель, составленный из независимых компонент тензоров (11). При этом удобно рассматривать тензоры в системе координат, в которой вектор $\mathbf{e}_3$ направлен по оси трансверсальной изотропии, а векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ выбраны так, что $T_{12}=0$.

Очевидно, что при любых значениях тензора $\mathbf{T}$ такую систему координат всегда можно найти. Тогда

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ T_{11} & T_{22} & T_{33} & T_{23} & T_{13} & 0\\ T_{11}^2+T_{13}^2 & T_{22}^2+T_{23}^2 & T_{13}^2+T_{23}^2+T_{33}^2 & T_{23}(T_{22}+T_{33}) & T_{13}(T_{11}+T_{33}) & T_{13}T_{23}\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -T_{13} & T_{23} & T_{22}-T_{11}\\ 2T_{13}T_{23} & -2T_{13}T_{23} & 0 & -T_{13}(T_{11}+T_{33}) & T_{23}(T_{22}+T_{33}) & T_{22}^2+T_{23}^2-T_{11}^2-T_{13}^2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&=T_{23}^2\left[T_{22}^2+T_{23}^2-T_{11}^2-T_{13}^2-\left(T_{22}-T_{11}\right)\left(T_{22}+T_{33}\right)\right]^2+\\ &+T_{13}^2\left[T_{22}^2+T_{23}^2-T_{11}^2-T_{13}^2-\left(T_{22}-T_{11}\right)\left(T_{11}+T_{33}\right)\right]^2+\\ &+T_{13}^2T_{23}^2\left[5\left(T_{22}-T_{11}\right)^2+4T_{13}^2+4T_{23}^2\right].\end{aligned} \qquad (12)$$

Определитель (12) равен нулю тогда и только тогда, когда $T_{23}=T_{13}=0$.

За исключением этого случая тензоры (11) линейно независимы и, следовательно, формула

$$\mathbf{E}=\beta_0\mathbf{I}+\beta_1\mathbf{T}+\beta_2\mathbf{T}^2+\beta_3\mathbf{W}^2+\beta_4(\mathbf{TW}-\mathbf{WT})+\beta_6(\mathbf{T}^2\mathbf{W}-\mathbf{WT}^2) \qquad (13)$$

задает тензор $\mathbf{E}$ общего вида. В (13) $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6$ — скалярные функции инвариантов $J_1, \ldots, J_5, Y$.

Рассмотрим случай, когда $T_{23} = T_{13} = 0$. Это означает, что плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{e}_3$, является плоскостью симметрии тензора $\mathbf{T}$ [13, 14]. Эта же плоскость — плоскость симметрии тензорной функции. Согласно принципу симметрии Кюри и из (4) плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{e}_3$, должна быть плоскостью симметрии тензора $\mathbf{E}$. Отсюда $E_{23} = E_{13} = 0$, т. е. этот тензор должен иметь вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

При условии $T_{12} = 0$ из (13) и для $T_{23} = T_{13} = 0$ имеем

$$\mathbf{E} = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} T_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} T_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \beta_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 & T_{22} - T_{11} & 0 \\ T_{22} - T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \beta_6 \begin{pmatrix} 0 & -T_{11}^2 + T_{22}^2 & 0 \\ -T_{11}^2 + T_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Формула (15) определяет тензор $\mathbf{E}$ вида (14) за исключением случая, когда $T_{11} = T_{22}$.

Рассмотрим случай, когда $T_{23} = T_{13} = 0$ и $T_{11} = T_{22}$, т. е.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Такой тензор, согласно [13, 14], имеет поворотную ось симметрии бесконечного порядка, совпадающую с вектором $\mathbf{e}_3$. Такую же ось имеет и тензорная функция (1). Из (4) следует, что тензор $\mathbf{E}$ должен иметь такую же ось трансверсальной изотропии и, следовательно, тензор $\mathbf{E}$ должен иметь вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}.$$

Такого вида тензор определяет соотношение (15) при $T_{11} = T_{22}$. Таким образом, для трансверсальной изотропии $C_{\infty h}$ связь тензора **E** и **T** во всех случаях определяется зависимостью (13).

Выводы. Выражение для тензорной функции группы симметрии $C_{\infty h}$ содержит меньше тензоров H_i по сравнению с таким же соотношением, полученным в работе [17]. Поэтому выражение для тензорной функции, приведенное в работе [17], приводимо. Определяющие соотношения для материалов, у которых классы симметрии структуры D_∞, $D_{\infty h}$, $C_{\infty v}$, относятся к группе $D_{\infty h}$. В такие соотношения входят шесть скалярных функций пяти инвариантов. Определяющие соотношения, которые имеют классы симметрии структуры C_∞, $C_{\infty h}$, относятся к группе $C_{\infty h}$. Эти соотношения имеют шесть скалярных функций шести инвариантов, причем один из инвариантов может принимать одно из двух постоянных значений. Это эквивалентно заданию 12 скалярных функций пяти инвариантов. Таким образом, соотношения для материалов класса симметрии C_∞, $C_{\infty h}$ имеют более сложный вид по сравнению с определяющими соотношениями для материалов класса D_∞, $D_{\infty h}$, $C_{\infty v}$.

Полученные результаты полезны при рассмотрении различных эффектов, которые могут возникать в трансверсально-изотропных средах разных классов симметрии. Так, если рассматривать нелинейно деформируемые материалы при одноосном нагружении в направлении оси, совпадающей с вектором $\mathbf{e}_1$, у материалов классов симметрии D_∞, $D_{\infty h}$, C_∞ не возникнут деформации сдвига, а у материалов классов C_∞, $C_{\infty h}$ будут иметь место деформации сдвига в плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Это следует из сопоставления формул (6) и (13).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Георгиевский Д.В. Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред. *Успехи механики*, 2002, № 2, с. 150–176.

[2] Георгиевский Д.В. Потенциальность изотропных нелинейных тензор-функций, связывающих два девиатора. *Известия РАН. МТТ*, 2016, № 5, с. 140–144.

[3] Boehler J.P. A simple derivation of representation for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*, 1979, vol. 59, iss. 4, pp. 157–167. DOI: 10.1002/zamm.19790590403

[4] Kiral E., Smith G.F. On the constitutive relations for anisotropic materials — triclinic, monoclinic, rombic, tetragonal and crystal systems. *Int. J. Eng. Sci.*, 1974, vol. 12, iss. 6, pp. 471–490. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90065-2

[5] Smith G.F. Anisotropic constitutive expressions. In: Boehler J.P. (eds). *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids / Comportment Méchanique des Solides Anisotropes*. Dordrecht, Springer, 1982, pp. 27–34. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-6827-1_2

[6] Spencer A.J.M. The formulation of constitutive equation for anisotropic solids. In: Boehler JP. (eds). *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids / Comportment Méchanique des Solides Anisotropes.* Dordrecht, Springer, 1982, pp. 3–26. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-6827-1_1

[7] Boehler J.P., Sawczuk A. On yielding of oriented solids. *Acta Mechanica*, 1977, vol. 27, iss. 1-4, pp. 185–204. DOI: 10.1007/BF01180085

[8] Победря Б.Е. О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1990, № 3, с. 96–101.

[9] Green A.E. A continuum theory of anisotropic fluid. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.,* 1964, vol. 60, iss. 1, pp. 123–128. DOI: 10.1017/S0305004100037531

[10] Zheng Q.-S. Theory of representation tensor functions — a unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47, iss. 11, pp. 545–587. DOI: 10.1115/1.3111066

[11] Спенсер Э. Теория инвариантов. М., Мир, 1974.

[12] Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М., Наука, 1979.

[13] Шубников А.В. О симметрии векторов и тензоров. *Изв. АН СССР. Серия физическая*, 1949, т. 13, № 3, с. 347–375.

[14] Желудев И.С. Симметрия скаляров, векторов и тензоров второго ранга. *Кристаллография*, 1957, т. 2, № 2, с. 207–216.

[15] Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

[16] Кюри П. Избранные труды. М., Наука, 1966.

[17] Zheng Q.-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic function of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part II: The representations for three dimensional transversely isotropic functions. *Int. J. Eng. Sci.*, 1993, vol. 31, iss. 10, pp. 1425–1433. DOI: 10.1016/0020-7225(93)90007-H

[18] Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. *ПММ*, 1963, т. 27, № 3, с. 393–417.

[19] Лохин В.В. Ковариантная форма целого рационального базиса полиномиальных инвариантов симметричного тензора второго ранга. *Проблемы современной механики*. М., Изд-во МГУ, 1998, с. 91–99.

[20] Bruhns O., Xiao H., Meyers A. On representations of yield functions for crystals, quasicrystals, and transversely isotropic solids. *Eur. J. Mech. A Solids*., 1999, vol. 18, iss. 1, pp. 47–67. DOI: 10.1016/S0997-7538(99)80003-5

[21] Цветков С.В. Критерии прочности трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2009, № 4, с. 86–99.

Цветков Сергей Васильевич — заведующий сектором лаборатории композиционных материалов НИИ «Специальное машиностроение» МГТУ им Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Цветков С.В. Нелинейные определяющие соотношения для трансверсально-изотропных материалов классов симметрии C_∞ и $C_{\infty h}$. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 3, с. 46–59.
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-46-59

NON-LINEAR CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIALS BELONGING TO THE C_∞ AND $C_{\infty h}$ SYMMETRY GROUPS

S.V. Tsvetkov sergejtsvetkov@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Transversely isotropic materials feature infinite-order symmetry axes. Depending on which other symmetry elements are found in the material structure, five symmetry groups may be distinguished among transversely isotropic materials. We consider constitu-tive equations for these materials. These equations connect two symmetric second-order tensors. Two types of constitutive equations describe the properties of these five material groups. We derived constitutive equations for materials belonging to the C_∞ and $C_{\infty h}$ symmetry groups in the tensor function form. To do this, we used corollaries of Curie's Symmetry Principle. This makes it possible to obtain a fully irreducible form of the tensor function

Keywords

Transverse isotropy, structural symmetry, tensor functions, invariants, symmetry principle, transversely isotropic material

Received 26.08.2019

REFERENCES

[1] Georgievskiy D.V. Tensor-nonlinear effects at isothermal deformation of continuum media. *Uspekhi mekhaniki*, 2002, no. 2, pp. 150–176 (in Russ.).

[2] Georgievskii D.V. Potentiality of isotropic nonlinear tensor functions relating two deviators. *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, iss. 5, pp. 619–622.
DOI: 10.3103/S0025654416050162

[3] Boehler J.P. A simple derivation of representation for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*, 1979, vol. 59, iss. 4, pp. 157–167.
DOI: 10.1002/zamm.19790590403

[4] Kiral E., Smith G.F. On the constitutive relations for anisotropic materials triclinic, monoclinic, rombic, tetragonal and crystal systems. *Int. J. Eng. Sci.*, 1974, vol. 12, iss. 6, pp. 471–490. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90065-2

[5] Smith G.F. Anisotropic constitutive expressions. In: Boehler J.P. (eds). *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids / Comportment Méchanique des Solides Anisotropes*. Dordrecht, Springer, 1982, pp. 27–34.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-6827-1_2

[6] Spencer A.J.M. The formulation of constitutive equation for anisotropic solids. In: Boehler JP. (eds). *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids / Comportment Méchanique des Solides Anisotropes*. Dordrecht, Springer, 1982, pp. 3–26.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-6827-1_1

[7] Boehler J.P., Sawczuk A. On yielding of oriented solids. *Acta Mechanica*, 1977, vol. 27, iss. 1-4, pp. 185–204. DOI: 10.1007/BF01180085

[8] Pobedrya B.E. On plasticity theory of transversally isotropic materials. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1990, no. 3, pp. 96–101 (in Russ.).

[9] Green A.E. A continuum theory of anisotropic fluid. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1964, vol. 60, iss. 1, pp. 123–128. DOI: 10.1017/S0305004100037531

[10] Zheng Q.-S. Theory of representation tensor functions — a unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47, iss. 11, pp. 545–587. DOI: 10.1115/1.3111066

[11] Spencer A.J.M. Theory of invariants. Continuum physics. Vol. 1. P. III. Theory of invariants. Department of Theoretical Mechanics University of Nottingham, 1971.

[12] Sirotin Yu.I., Shaskol’skaya M.P. Osnovy kristallofiziki [Fundamentals of crystallophysics]. Moscow, Nauka Publ., 1979.

[13] Shubnikov A.V. On symmetry of vectors and tensors. *Izv. AN SSSR. Seriya fizicheskaya*, 1949, vol. 13, no. 3, pp. 347–375 (in Russ.).

[14] Zheludev I.S. Symmetry of scalars, vectors and second-rank tensor. *Kristallografiya*, 1957, vol. 2, no. 2, pp. 207–216 (in Russ.).

[15] Dimitrienko Yu.I. Tenzornyy analiz [Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011.

[16] Curie P. Izbrannye trudy [Selectas]. Moscow, Nauka Publ., 1966.

[17] Zheng Q.-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic function of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part II: The representations for three dimensional transversely isotropic functions. *Int. J. Eng. Sci.*, 1993, vol. 31, iss. 10, pp. 1425–1433. DOI: 10.1016/0020-7225(93)90007-H

[18] Lokhin V.V., Sedov L.I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, iss. 3, pp. 597–629.
DOI: 10.1016/0021-8928(63)90149-7

[19] Lokhin V.V. Kovariantnaya forma tselogo ratsional’nogo bazisa polinomial’nykh invariantov simmetrichnogo tenzora vtorogo ranga [Covariant form of integral ra-

tional basis of second rank symmetrical tensor invariants]. *Problemy sovremennoy mekhaniki* [Problems of Modern Mechanics]. Moscow, MSU Publ., 1998, pp. 91–99 (in Russ.).

[20] Bruhns O., Xiao H., Meyers A. On representations of yield functions for crystals, quasicrystals, and transversely isotropic solids. *Eur. J. Mech. A Solids*, 1999, vol. 18, iss. 1, pp. 47–67. DOI: 10.1016/S0997-7538(99)80003-5

[21] Tsvetkov S.V. Strength criteria of transversally-isotropic materials of different classes of structure symmetry. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2009, no. 4, pp. 86–99 (in Russ.).

Tsvetkov S.V. — Head of Sector, Composite Material Laboratory, Special Mechanical Engineering Scientific and Research Institute, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Tsvetkov S.V. Non-linear constitutive equations for transversely isotropic materials belonging to the C_∞ and $C_{\infty h}$ symmetry groups. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 3, pp. 46–59 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-46-59