УДК 519.718 DOI: 10.18698/1812-3368-2019-6-4-17

ОЦЕНКА ГАРАНТИРОВАННОГО СРОКА СЛУЖБЫ ДЛЯ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ РАЗНОТИПНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

И.В. Павлов ipavlov@bmstu.ru
С.В. Разгуляев sergach_91@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача доверительного оценивания показателей надежности для модели системы с нагруженным резервированием элементов различных подсистем. Построены нижние доверительные границы для функции надежности системы, а также для связанного с ней показателя — гарантированного с заданным уровнем гарантии времени безотказной работы (γ-процентного ресурса) системы. Получены приближенные асимптотические (для случая высокой надежности) выражения для доверительных оценок основных показателей надежности системы. Приведены основанные на этих асимптотических выражениях достаточно простые приближенные аналитические расчетные формулы для нижней доверительной границы функции надежности системы и аналогичной доверительной границы для гарантированного срока службы системы

Ключевые слова

Гарантированный срок службы, модель, система, резервирование, надежность, гамма-процентный ресурс, асимптотические выражения

Поступила 16.04.2019

Введение. Задачи оценки и прогноза (с заданным уровнем достоверности) показателей надежности и ресурса сложных систем по результатам испытаний их элементов довольно часто возникают в инженерной практике при проектировании и опытной отработке современных технических систем. В настоящее время существующие методы доверительного оценивания указанных показателей разработаны в основном для систем с резервированием однотипными (идентичными) элементами (см. [1–13] и др.). При этом в работах [1–6] и [10–13] рассмотрены системы с резервированием без восстановления, а в работах [7–9] — некоторые модели систем с восстановлением и резервированием идентичными элементами. Модель системы с параллельной структурой с резервированием разнотипными элементами для показателя — вероятности безотказной работы системы на заданном интервале времени t приведена в [14, 15]. Далее рассмотрена более общая ситуация, когда система может быть составлена из произвольного числа различных подсистем, в каждой из которых резервирование (в нагруженном режиме) может осуществляться разнотипными элементами. Кроме того, дано решение задачи как по отношению к указанному выше показателю — вероятности безотказной работы системы в течение заданного времени, так и для другого часто используемого показателя — гарантированного (с заданным уровнем гарантии) срока службы системы.

Пусть имеется система, составленная из m различных подсистем, соединенных последовательно (в смысле надежности), i-я подсистема состоит из n_i элементов, работающих в режиме нагруженного резервирования, $i = 1,\dots,m.$ В предположении, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга, функция надежности системы имеет вид

$$P_{\text{c}}(t) = \prod_{i=1}^{m}\left[1 - \prod_{j\in B_i} P_j(\lambda_j,\ t)\right], \tag{1}$$

где $P_j(\lambda_j, t) = 1 - \exp(-\lambda_j t)$ — функция надежности j-го элемента, $j = 1,\dots,n,$ $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ — общее число элементов системы; λ_j — параметр надежности (интенсивность отказов) j-го элемента, $j = 1,\dots,n;$ $B_i \subset (1,\dots,n)$ — подмножество индексов элементов i-й подсистемы, $i = 1,\dots,m.$

В соответствии с (1) функция надежности системы может быть представлена как функция вектора параметров надежности элементов

$$P_{\text{c}}(t) = P_{\text{c}}(\lambda, t) = \prod_{i=1}^{m}\left\{1 - \prod_{j\in B_i}\left[1 - \exp(-\lambda_j t)\right]\right\}. \tag{2}$$

Здесь $\lambda = \{\lambda_j,\ j\in B_j,\ i = 1,\dots,m\}$ — полный вектор параметров надежности элементов. Обозначим через $Z = \{\lambda : \lambda_j > 0,\ j \in B_j,\ i = 1,\dots,m\}$ — множество возможных значений вектора параметров $\lambda.$ Гарантированное (с уровнем гарантии q) время безотказной работы (q-процентный ресурс) системы $t_q = t_q(\lambda)$ определяется при данном $\lambda \in Z$ исходя из выражения (2) как

$$t_q(\lambda)=\{t : P_{\text{c}}(\lambda, t)=q\},\ \lambda\in Z. \tag{3}$$

Требуется построить нижние доверительные границы для показателей надежности системы $P_{\text{c}}(\lambda,t)$ и $t_q(\lambda)$ на основе результатов испытаний элементов системы. Предположим, что испытания элементов системы проводились по стандартным планам типа $[N_j\ T_j]$ (обозначения взяты из [1]), т. е. на испытаниях (с восстановлением отказавших элементов) в течение времени T_j поставлено N_j элементов j-го типа, в результате чего за время T_j наблюдалось d_j отказов, $j\in B_j,\ i=1,\ldots,m.$ Предположим, что результаты испытаний d_j по различным типам элементов системы независимы между собой. Обозначим через $d=\{d_j,\ j\in B_j,\ i=1,\ldots,m\}$ — вектор результатов испытаний, $L=\{d : d_j=0,1,2,\ldots;\ j\in B_j;\ i=1,\ldots,m\}$ — множество всех возможных значений вектора d и $P_\lambda\{d\}$ — вероятностное распределение на множестве результатов испытаний d при данном $\lambda\in Z$.

Требуется построить функции результатов испытаний $\underline{P}_{\text{c}}(t)=$ $=\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t)$, $\underline{t}_q=\underline{t}_q(d)$ такие, что выполняются неравенства

$$P_\lambda\{\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t)\le P_{\text{c}}(\lambda,\ t)\}\ge\gamma,\quad \lambda\in Z;$$

$$P_\lambda\{\underline{t}_q(d)\le t_q(\lambda)\}\ge\gamma,\quad \lambda\in Z.$$

Построение нижней доверительной границы для функции надежности системы. Наблюдаемое на испытаниях элементов j-го типа число отказов d_j имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda_i=N_iT_i\lambda_i$ [1, 4]. Тем самым случайная величина $D=\sum\limits_{j=1}^{n}d_j$ также имеет пуассоновское распределение с параметром $\sum\limits_{j=1}^{n}\Lambda_j=\sum\limits_{j=1}^{n}N_jT_j\lambda_j$. Откуда следует, что справедливо неравенство

$$P_\lambda\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in B_i}N_jT_j\lambda_j\le\Delta_\gamma(D)\right\}\ge\gamma,\ \ \lambda\in Z, \tag{4}$$

где $\Delta_\gamma(D)$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра пуассоновского распределения [1, 16]. Исходя из неравенства (4) рассмотрим систему подмножеств $H_d\in Z,\ \ d\in L,$ в пространстве параметров элементов λ:

$$H_d = \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j \le \Delta_\gamma \left(D \right),\ \lambda_j \ge 0,\ j \in B_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}. \qquad (5)$$

С учетом (4) выполняются неравенства $P_\lambda \left\{ \lambda \in H_d \right\} \ge \gamma,\ \lambda \in Z,$ т. е. (5) образует систему γ-доверительных множеств для вектора параметров $\lambda \in Z$. В соответствии с общим методом доверительных множеств (см. [1, 4, 5] и др.) нижняя γ-доверительная граница для функции $P_{\text{с}}\left(t \right) = P_{\text{с}}\left(\lambda, t \right)$ вычисляется как

$$\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t \right) = \min_{\lambda \in H_d} \prod_{i=1}^{m} \left\{ 1 - \prod_{j \in B_i} \left[1 - \exp\left(-\lambda_j t \right) \right] \right\}, \qquad (6)$$

где, учитывая (5), минимум находится по доверительной области в пространстве параметров λ, заданной неравенствами

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j \le \Delta_\gamma \left(D \right); \\ \lambda_j \ge 0,\ j \in B_i,\ i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (7)$$

Функция надежности системы в правой части (6) монотонно убывает по каждому параметру $\lambda_j,\ j \in B_i,\ i = 1, \ldots, m,$ что соответствует очевидному условию — улучшению надежности системы при улучшении параметров надежности элементов. Таким образом, данная задача эквивалентна задаче минимизации в (6) при ограничениях

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j = \Delta_\gamma \left(D \right); \\ \lambda_j \ge 0,\ j \in B_i,\ i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (8)$$

Для решения данной задачи для системы в целом рассмотрим сначала вспомогательные задачи для каждой i-й подсистемы:

найти функцию

$$\varphi_i\left(u_i, t \right) = \max \prod_{j \in B_i} \left[1 - \exp\left(-\lambda_j t \right) \right], \qquad (9)$$

где максимум находится при ограничениях

$$\begin{gathered} \sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j = u_i \ge 0; \\ \lambda_j \ge 0,\ j \in B_i. \end{gathered} \qquad (10)$$

Это соответствует частичной оптимизации целевой функции надежности системы в (6) по отдельным подсистемам, где $u_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m$ — некоторые «текущие» параметры.

Задача на вычисление максимума в (9) при ограничениях (10) эквивалентна нахождению

$$\max \sum_{j \in B_i} \ln\left[1-\exp\left(-\lambda_j t\right)\right] \tag{11}$$

при условии

$$\sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j = u_i. \tag{12}$$

Система уравнений Лагранжа для нахождения условного максимума (11), (12) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{t\exp\left(-\lambda_j t\right)}{1-\exp\left(-\lambda_j t\right)} = \beta_i N_j T_j, \ j \in B_i; \\ \sum_{j \in B_i} N_j T_j \lambda_j = u_i, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\beta_i > 0$ — множитель Лагранжа. После простых преобразований, обозначая через $\sigma_i = 1/\beta_i > 0$, находим условный максимум в точке

$$\lambda_j = t^{-1} \ln\left[1+\left(\frac{t\,\sigma_i}{N_j T_j}\right)\right], \ j \in B_i.$$

Здесь величина σ_i находится из уравнения

$$\sum_{j \in B_i} \left(\frac{N_j T_j}{t}\right) \ln\left[1+\left(\frac{t\sigma_i}{N_j T_j}\right)\right] = u_i, \ i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Откуда следует решение вспомогательных задач (9) для каждой i-й подсистемы:

$$\varphi_i\left(u_i, t\right) = \prod_{j \in B_i} \left[\frac{t\sigma_i\left(u_i, t\right)}{t\sigma_i\left(u_i, t\right)+N_j T_j}\right], \tag{15}$$

где величины $\sigma_i = \sigma_i\left(u_i, t\right)$ находятся в неявном виде из уравнения (14).

Далее, учитывая ограничения (7), определяем нижнюю доверительную границу $\underline{P}_{\text{c}}\left(d,\ t\right)$ для функции надежности системы в целом:

$$\underline{P}_{\text{c}}\left(d,\ t\right) = \min \prod_{i=1}^{m} \left[1-\varphi_i\left(u_i, t\right)\right], \tag{16}$$

где минимум берется при условии

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \Delta_\gamma(D); \qquad (17)$$
$$u_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Данная задача эквивалентна следующей:
найти

$$\overline{B}(d,\ t) = \max \sum_{i=1}^{m} B_i(u_i,\ t). \qquad (18)$$

Здесь $B_i(u_i,\ t) = -\ln\left[1 - \varphi_i(u_i,\ t)\right]$, а максимум берется при тех же ограничениях (17). Доверительная граница $\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t)$ находится как

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t) = \exp\left[-\overline{B}(d,t)\right].$$

Функция вида

$$B_i(u_i,\ t) = -\ln\left[1 - \varphi_i(u_i,\ t)\right] \qquad (19)$$

выпукла по $u_i > 0$ при каждом фиксированном $t > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Функция $\varphi_i(u_i,\ t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi_i(u_i,\ t) = h_i\left[\sigma_i(u_i,t)\right], \qquad (20)$$

где

$$h_i(\sigma_i) = \prod_{j \in B_i} \left[\frac{\sigma_i}{\sigma_i(u_i, t) + C_j}\right]. \qquad (21)$$

Здесь $C_j = C_j(t) = N_j T_j / t$, $j \in B_i$, $i = 1, \ldots, m$ — коэффициенты; функция $\sigma_i(u_i,t)$ в соответствии с (14) определяется неявным образом из уравнения относительно σ_i:

$$\sum_{j \in B_i} C_j \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_i}{C_j}\right)\right] = u_i,\ \ i = 1, \ldots, m. \qquad (22)$$

Из выражения (21) следует

$$h_i'(\sigma_i) = h_i(\sigma_i)\left[\ln h_i(\sigma_i)\right]' = h_i(\sigma_i) \sum_{j \in B_i} \frac{C_j}{\sigma(\sigma + C_j)}. \qquad (23)$$

Далее из уравнения (22) находим

$$\frac{\partial \sigma_i(u_i,t)}{\partial u_i} = \left[\sum_{j \in B_i} \frac{C_j}{C_j + \sigma_i(u_i, t)}\right]. \qquad (24)$$

Из определения функции $\varphi_i\left(u_i,t\right)$ в (20) с учетом (23), (24) получаем

$$\frac{\partial\varphi_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=h_i'\left[\sigma_i\left(u_i,t\right)\right]\frac{\partial\sigma_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=\frac{h_i\left[\sigma_i\left(u_i,t\right)\right]}{\sigma_i\left(u_i,t\right)}>0. \tag{25}$$

Из определения функции $B_i\left(u_i,\ t\right)$ в (19) следует

$$\frac{\partial B_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=\frac{\partial\varphi_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}\left[1-\varphi_i\left(u_i,t\right)\right]^{-1}>0,$$

отсюда, учитывая (25), запишем

$$\frac{\partial B_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=\frac{h_i\left[\sigma_i\left(u_i,t\right)\right]}{\sigma_i\left(u_i,t\right)\left\{1-h_i\left[\sigma_i\left(u_i,t\right)\right]\right\}}$$

или (21) —

$$\frac{\partial B_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=\frac{1}{\sigma_i}\prod_{j\in B_i}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i+C_j}\right)\left[1-\prod_{j\in B_i}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i+C_j}\right)\right]^{-1}$$

(где используем сокращенное обозначение $\sigma_i=\sigma_i\left(u_i,t\right)$), после простых преобразований находим

$$\frac{\partial B_i\left(u_i,t\right)}{\partial u_i}=\left[\sum_{k=0}^{n_i-1}A_k\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^k\right]^{-1}. \tag{26}$$

Здесь $\sigma_i=\sigma_i\left(u_i,t\right)$, $A_k>0$ — положительные коэффициенты. Функция $\sigma_i\left(u_i,t\right)$ в соответствии с определением этой функции в (22) монотонно возрастает по $u_i>0$. Тем самым из (26) следует, что функция $B_i\left(u_i,t\right)$ выпукла по $u_i>0$ при любом фиксированном $t>0$ для всех подсистем с индексами $i=1,\ldots,m$.

Следовательно, функция $\sum\limits_{i=1}^{m}B_i\left(u_i,t\right)$, от которой берется максимум в (18), выпукла по вектору переменных $u=\left(u_1,\ldots,u_m\right)$ как сумма выпуклых функций. В соответствии с известными результатами теории выпуклого программирования (например, [17] и др.) следует, что максимум выпуклой функции в (18) по замкнутой выпуклой области (17) достигается в одной из «угловых» точек этой области вида $\left(0,\ldots,0,\ \tilde{u}_i,0,\ldots,0\right)$, $i=1,\ldots,m$, где $\tilde{u}_i=\Delta_\gamma\left(D\right)$, $i=1,\ldots,m$.

Откуда следует решение задачи на отыскание максимума в (18)

$$\overline{B}\left(d,t\right)=\max_{i=1,\ldots,m}B_i\left(\tilde{u}_i,t\right)$$

и соответствующее решение задачи на построение нижней доверительной границы $\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t)$ для функции надежности системы в (16):

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t) = 1 - \max_{i=1,\ldots,m} \prod_{j\in B_i} \left(\frac{t\,\sigma_i(\tilde{u}_i, t)}{t\,\sigma_i(\tilde{u}_i, t) + N_j T_j} \right), \tag{27}$$

где $\sigma_i = \sigma_i(\tilde{u}_i, t)$ находится из уравнения относительно σ_i,

$$\sum_{j\in B_i} \frac{N_j T_j}{t} \ln\left(1 + \frac{t\sigma_i}{N_j T_j}\right) = \tilde{u}_i, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{28}$$

Далее исходя из точных выражений (27), (28) дается более простое приближенное асимптотическое (для случая высокой надежности при $\left(\left(t/\left(N_j T_j\right)\right)\to 0\right)$ выражение (29) для доверительной границы $P_{\text{c}}(d,\ t)$. Пусть $\left(t/\left(N_j T_j\right)\right)\to 0,\ \ j\in B_i,\ \ i=1,\ldots,m.$ Покажем, что тогда

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t) = 1 - \max_{i=1,\ldots,m} \left[\frac{t\,\Delta_\gamma(D)}{n_i}\right]^{n_i} \prod_{j\in B_i} \frac{1}{N_j T_j}\left[1 + o(1)\right]. \tag{29}$$

Обозначим $a_j = t/\left(N_j T_j\right),\ \ j\in B_i,\ \ i=1,\ldots,m.$ Имеют место неравенства

$$a_j\sigma_i - \delta_{ij} \le \ln\left(1 + a_j\sigma_i\right) \le a_j\sigma_i, \tag{30}$$

где $0 \le \delta_{ij} \le \left(a_j\sigma_i\right)^2/2,\ \ j\in B_i,\ \ i=1,\ldots,m.$ Откуда следуют неравенства для левой части уравнений (28):

$$n_i\sigma_i - \delta_i \le \sum_{j\in B_i} \frac{1}{a_j} \ln\left(1 + a_j\sigma_i\right) \le n_i\sigma_i.$$

Здесь $0 \le \delta_i \le \left(\frac{1}{2}\right)\sigma_i^2 \sum_{j\in B_i} a_j \to 0,\ i=1,\ldots,m.$ Тогда после несложных преобразований получаем, что решение $\sigma_i = \sigma_i(\tilde{u}_i, t)$ уравнения (28) имеет вид

$$\sigma_i = \frac{\Delta_\gamma(D)}{n_i}\left(1 + \varepsilon_i\right), \tag{31}$$

где $0 < \varepsilon_i < b_i t \to 0,$

$$b_i = \sqrt{2}\ \Delta_\gamma(D) \sum_{j\in B_i} \frac{t}{N_j T_j}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Далее из (27), (31) следует асимптотическое выражение (29) для функции $\underline{P}_{\text{c}}(d,\ t)$.

Из асимптотического выражения (29) следует приближенная (для случая высокой надежности при $\left(t/(N_j T_j)\right) \ll 1$) расчетная формула для вычисления нижней доверительной границы функции надежности системы

$$\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t\right) \cong 1 - \max_{i=1,\ldots,m}\left[\frac{\Delta_\gamma\left(D\right)}{n_i}\right]^{n_i}\prod_{j\in B_i}\left(\frac{t}{N_j T_j}\right). \tag{32}$$

Нижняя доверительная граница для гарантированного времени безотказной работы системы. Рассмотрим построение нижней доверительной границы для показателя — гарантированного срока службы (времени безотказной работы) системы $t_q = t_q\left(\lambda\right)$, определенного выше в выражении (3). Поскольку статистика D, на основе которой построена выше доверительная граница $\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t\right)$ в (27), (28), не зависит от $t \ge 0$, эта функция удовлетворяет неравенству

$$P_\lambda\left\{\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t\right) \le P_{\text{с}}\left(\lambda,\ t\right) \text{ при всех } t \ge 0\right\} \ge \gamma, \quad \lambda \in Z,$$

т. е. $\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t\right)$ дает нижнюю γ-доверительную полосу для функции надежности системы $P_{\text{с}}\left(\lambda,\ t\right) = P_{\text{с}}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t\right)$. Исходя из выражений (3), (27) определим величину $\underline{t}_q = \underline{t}_q\left(d\right)$ при данном уровне гарантии q:

$$\underline{t}_q\left(d\right) = \left\{t:\ \underline{P}_{\text{с}}\left(d, t\right) = q\right\}. \tag{33}$$

Пусть $\lambda \in Z$. Введем события $C_\lambda = \left\{\underline{t}_q\left(d\right) \le t_q\left(\lambda\right)\right\}$ и $A_\lambda = \left\{\underline{P}_{\text{с}}\left(d,\ t\right) \le P_{\text{с}}\left(\lambda,\ t\right) \text{ при всех } t \ge 0\right\}$. Для этих событий выполняется соотношение включения $A_\lambda \subset C_\lambda,\ \lambda \in Z.$ Откуда следуют неравенства

$$P_\lambda\left\{\underline{t}_q\left(d\right) \le t_q\left(\lambda\right)\right\} = P_\lambda\left\{C_\lambda\right\} \ge P_\lambda\left\{A_\lambda\right\} \ge \gamma, \ \lambda \in Z.$$

Тем самым определенная в (33) функция результатов испытаний $\underline{t}_q\left(d\right)$ дает нижнюю γ-доверительную границу для гарантированного времени безотказной работы системы $t_q = t_q\left(\lambda\right)$. Учитывая выражения (27), (28), величина $\underline{t}_q = \underline{t}_q\left(d\right)$ определяется при данном $d \in L$ из уравнения относительно t:

$$\max_{i=1,\ldots,m}\prod_{j\in B_i}\frac{t\ \sigma_i\left(\tilde{u}_i,\ t\right)}{t\ \sigma_i\left(\tilde{u}_i,\ t\right) + N_j T_j} = 1 - q. \tag{34}$$

Здесь функции $\sigma_i = \sigma_i\left(\tilde{u}_i, t\right)$ задаются неявным образом в уравнениях (28) для различных подсистем $i = 1, \ldots, m.$ Точное вычисление доверительной границы $\underline{t}_q = \underline{t}_q(d)$ для гарантированного срока службы системы на основе уравнений (34), (28) является достаточно сложным вследствие неявного задания функций $\sigma_i(\tilde{u}_i, t)$, $i = 1, \ldots, m.$ Тем не менее из асимптотической формулы (29) для $\underline{P}_{\text{с}}(d, t)$ нетрудно получить соответствующее приближенное асимптотическое (при $q \to 1$) выражение для $\underline{t}_q = \underline{t}_q(d)$ вида

$$\underline{t}_q = \min_{i=1,\ldots,m} n_i (1-q)^{1/n_i} \; \Delta_\gamma^{-1}(D) \prod_{j \in B_i} (N_j T_j)^{1/n_i} [1 + o(1)]. \qquad (35)$$

Из выражений (29) и (35) можно получить доверительные границы показателей надежности — функции надежности системы $P_{\text{с}}(t)$ и гарантированного срока службы t_q. Кроме того, эти выражения позволяют по крайней мере на качественном уровне видеть аналитическую зависимость доверительных границ этих показателей от таких факторов, как наблюдаемое на испытаниях число отказов, объемы испытаний элементов и кратность резервирования в подсистемах.

Заключение. Для модели системы с резервированием разнотипными элементами в различных подсистемах решена задача по определению нижних доверительных границ (по результатам испытаний элементов системы) для таких основных показателей, как вероятность безотказной работы (функция надежности) системы в течение заданного времени *t*, а также гарантированное время безотказной работы (*q*-процентный ресурс) системы. Получены приближенные (для случая высокой надежности) аналитические выражения для доверительных оценок основных показателей, на основе которых может исследоваться зависимость от входных параметров модели. Существенный интерес с позиции приложений также представляет дальнейшее обобщение результатов на модели систем с более сложной структурой и для более общих режимов резервирования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., Либроком, 2013.

[2] Гнеденко Б.В., ред. Вопросы математической теории надежности. М., Радио и связь, 1983.

[3] Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М., Наука, 1984.

[4] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical reliability engineering. John Wiley & Sons, 1999.

[5] Беляев Ю.К. Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров. *ДАН СССР*, 1967, т. 169, № 4, с. 755–758.

[6] Павлов И.В. Доверительные границы для показателей надежности системы с возрастающей функцией интенсивности отказов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 2, с. 70–75.

[7] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Построение доверительных границ для коэффициента готовности системы с восстанавливаемыми элементами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2015, № 4, с. 15–22.
DOI: 10.18698/1812-3368-2015-4-15-22

[8] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Доверительное оценивание показателей надежности системы с дублированием и восстановлением элементов. *Математика и математическое моделирование*, 2017, № 6, с. 32–39.
DOI: 10.24108/mathm.0617.0000088

[9] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Нижняя доверительная граница среднего времени безотказной работы системы с восстанавливаемыми элементами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 5, с. 37–44.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-37-44

[10] Сидняев Н.И. Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2003, № 4, с. 24–31.

[11] Садыхов Г.С., Бабаев И.А. Расчет необходимого количества объектов для проведения циклических испытаний на надежность. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2016, № 3, с. 56–63.

[12] Zuo M.J., Zhigang T. Performance evaluation of generalized multi-state *k*-out-of-*n* systems. *IEEE Trans. Rel.*, 2006, vol. 55, iss. 2, pp. 319–327.
DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2006.874916

[13] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a *k*-out-of-*n* structure at the system level. *IEEE Trans. Rel.*, 2006, vol. 55, iss. 2, pp. 314–318.
DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2006.874934

[14] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 2. DOI: https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-2-1365

[15] Павлов И.В. Оценка надежности системы с резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 3, с. 149–158.

[16] Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.

[17] Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., Сов. радио, 1973.

Павлов Игорь Валерианович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Разгуляев Сергей Васильевич — аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Павлов И.В., Разгуляев С.В. Оценка гарантированного срока службы для модели системы с резервированием разнотипными элементами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 6, с. 4–17.
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-6-4-17

ESTIMATED GUARANTEED LIFE FOR A SYSTEM MODEL WITH REDUNDANCY OF HETEROGENEOUS ELEMENTS

I.V. Pavlov ipavlov@bmstu.ru
S.V. Razgulyaev sergach_91@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper focuses on the problem of confidence estimation of reliability indicators for a system model with loaded redundancy of elements of various subsystems. The lower confidence limits are constructed for the system reliability function, as well as for the indicator associated with it, the indicator having a given guaranteed level of the system uptime, i.e., its gamma-percentile life. Within the research, we obtained approximate asymptotic — for the case of high reliability — expressions for confidence estimates of these basic indicators of system reliability. Rather simple approximate analytical calculation formulas based on these asymptotic expressions are given for the lower confidence boundary of the system reliability function and a similar confidence boundary for the guaranteed system life

Keywords

Guaranteed life, model, system, redundancy, reliability, gamma-percentile resource, asymptotic expressions

Received 16.04.2019

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D. Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow, Librokom Publ., 2013.

[2] Gnedenko B.V., ed. Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti [Problems of reliability theory]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1983.

[3] Barlow R.E., Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing probability models. Holt, Rinehart and Winston, 1975.

[4] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical reliability engineering. John Wiley & Sons, 1999.

[5] Belyaev Yu.K. Confidence intervals for functions of several unknown parameters. *Doklady AN SSSR*, 1967, vol. 169, no. 4, pp. 755–758 (in Russ.).

[6] Pavlov I.V. Confidence limits for system reliability indices with increasing function of failure intensity. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2017, vol. 46, iss. 2, pp. 149–153. DOI: https://doi.org/10.3103/S1052618817020133

[7] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Confidence interval calculations for the system availability index with recoverable components. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2015, no. 4, pp. 15–22 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-4-15-22

[8] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Confidence estimation of reliability indices of the system with elements duplication and recovery. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 32–39 (in Russ.). DOI: 10.24108/mathm.0617.0000088

[9] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Lower confidence limit for mean time between failures in a system featuring repairable components. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 5, pp. 37–44 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-37-44

[10] Sidnyaev N.I. Mathematical modeling for reliability assessment of complex technical systems. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2003, no. 4, pp. 24–31 (in Russ.).

[11] Sadykhov G.S., Babaev I.A. Computations of the least number of objects necessary for the cyclical reliability testing. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2016, vol. 45, iss. 3, pp. 239–246. DOI: https://doi.org/10.3103/S1052618816030134

[12] Zuo M.J., Zhigang T. Performance evaluation of generalized multi-state k-out-of-n systems. *IEEE Trans. Rel.*, 2006, vol. 55, iss. 2, pp. 319–327. DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2006.874916

[13] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. *IEEE Trans. Rel.*, 2006, vol. 55, iss. 2, pp. 314–318. DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2006.874934

[14] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Reliability asymptotic estimates of a system with redundant heterogeneous elements. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2015, no. 2 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-2-1365

[15] Pavlov I.V. Estimating reliability of redundant system from the results of testing its elements. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, iss. 3, pp. 507–514.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117917030109

[16] Goryainov V.B., Pavlov I.V., Tsvetkova G.M., et al. Matematicheskaya statistika [Mathematical statistics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.

[17] Zangwill W.I. Nonlinear programming: a unified approach. Prentice-Hall, 1969.

Pavlov I.V. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematic, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Razgulyaev S.V. — Post-Graduate Student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Estimated guaranteed life for a system model with redundancy of heterogeneous elements. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 6, pp. 4–17 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-6-4-17