УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1 DOI: 10.18698/1812-3368-2020-1-4-15

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

О.Г. Стырт styrt@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Работа посвящена исследованию стационарных подалгебр общего положения компактных линейных групп. Доказано, что за исключением некоторых определенных случаев стационарная подалгебра общего положения тензорного произведения вещественных либо комплексных представлений компактных групп действует скалярно на всех тензорных сомножителях, кроме, быть может, одного. В вещественном случае это означает, что указанная стационарная подалгебра общего положения содержится в одной из подалгебр — прямых слагаемых. Для решения задачи использованы стандартные соображения линейной алгебры, теории групп и алгебр Ли и их представлений, а также методы, схожие с методами решения аналогичных задач для комплексных редуктивных линейных групп

Ключевые слова

Группа Ли, компактная линейная группа, стабилизатор общего положения, стационарная подалгебра общего положения

Поступила 31.01.2019

Принята 16.09.2019

Введение. Линейное представление группы Ли G (соответственно алгебры Ли $\mathfrak{g}$) в пространстве V для краткости будем обозначать через $G:V$ (соответственно $\mathfrak{g}:V$), если из контекста ясно, о каком именно действии идет речь. При этом для стабилизатора (соответственно стационарной подалгебры) вектора $v \in V$ используем стандартное обозначение G_v (соответственно $\mathfrak{g}_v$). Подгруппа группы Ли G называется *стабилизатором общего положения* или *типичным стабилизатором* представления $G:V$, если она сопряжена стабилизаторам всех векторов некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества пространства V. Аналогично подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *стационарной подалгеброй общего положения* или *типичной стационарной подалгеброй* представления $\mathfrak{g}:V$, если она сопряжена стационарным подалгебрам всех векторов некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества в V. Всевозможные типичные стабилизаторы (соответственно стационарные подалгебры) в случае их существования образуют в точности один класс сопряженности подгрупп (соответственно подалгебр) Ли. Наконец, *вектором общего положения* или *типичным вектором* представления $G:V$ (соответственно $\mathfrak{g}:V$) называется вектор с типичным стабилизатором (соответственно стационарной подалгеброй).

В настоящей работе исследованы стационарные подалгебры общего положения компактных линейных групп. Известно, что всякое представление произвольной компактной группы Ли G обладает стабилизатором общего положения H, а соответствующее касательное представление — стационарной подалгеброй общего положения $\operatorname{Lie} H \subset \operatorname{Lie} G$, причем стабилизатор (соответственно стационарная подалгебра) любого вектора содержит некоторый типичный стабилизатор (соответственно стационарную подалгебру).

Несколько предшествующих работ посвящено изучению орбит, стабилизаторов и стационарных подалгебр общего положения комплексных редуктивных линейных групп. Так, в работах [1–4] описаны линейные группы с бесконечным стабилизатором общего положения (что равносильно, с нетривиальной стационарной подалгеброй общего положения), в работах [5, 6] — с нетривиальным конечным стабилизатором общего положения, в работе [7] — с открытой орбитой общего положения.

Изучение стационарных подалгебр общего положения компактных линейных групп начато относительно недавно. Именно, в работе [8] рассмотрены простые неприводимые группы, а в настоящей работе — тензорные произведения более чем одной компактной линейной группы. На указанные линейные группы — тензорные сомножители — априори не накладывается ограничений, что создает видимые препятствия для решения поставленной задачи путем перехода к комплексификации представления.

Далее вместо записи «стационарная подалгебра общего положения» использовано сокращение «с.п.о.п» [2–4].

Пусть $\mathbb{F}$ — поле, равное $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$, m — натуральное число, $V_1,\dots,V_m$ — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$, а $G_i \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V_i)$ $(i=1,\dots,m)$ — компактные подгруппы. Обозначим через G компактную группу Ли $G_1\times\ldots\times G_m$, через $\mathfrak{g}$ — компактную алгебру Ли $\mathfrak{g}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_m = \operatorname{Lie} G$, а через V — тензорное произведение пространств $V_1,\dots,V_m$ над полем $\mathbb{F}$. Представления $G_i:V_i$ и $\mathfrak{g}_i:V_i$ $(i=1,\dots,m)$ над полем $\mathbb{F}$ естественным образом индуцируют представления $R:G\to\mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ и $\rho=dR:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V)$.

Пусть $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ — с.п.о.п представления ρ.

Положим $n_i := \dim_{\mathbb{F}} V_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и будем считать, что $m, n_1, \ldots, n_m > 1$.

Рассмотрим произвольное число $i = 1, \ldots, m$. Пусть S_i — вещественное пространство всех симметрических (соответственно эрмитовых) форм на пространстве V_i в случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), а $P_i \subset S_i$ подмножество всех положительно определенных форм. Поскольку группа $G_i \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V_i)$ компактна, в пространстве V_i существует G_i-инвариантное скалярное умножение $f_i \in P_i$. Фиксируя его, будем в дальнейшем понимать V_i как евклидово (соответственно эрмитово) пространство при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). В группе $\mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V_i)$ все операторы, сохраняющие скалярное умножение $f_i \in P_i$, образуют компактную подгруппу, которую обозначим через $\mathbf{U}(V_i)$. Далее в алгебре $\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V_i)$, понимаемой как вещественная, обозначим через $\mathfrak{u}(V_i)$ подалгебру $\operatorname{Lie} \mathbf{U}(V_i)$, через $\mathfrak{su}(V_i)$ — подалгебру $\mathfrak{sl}_{\mathbb{F}}(V_i) \cap \mathfrak{u}(V_i)$, а через $S(V_i)$ — подпространство всех самосопряженных операторов. Ясно, что $\mathfrak{u}(V_i) = \{A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V_i) : A^* = -A\}$, $G_i \subset \mathbf{U}(V_i)$ и $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{u}(V_i)$. Наконец, обозначим через π_i гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_i$, осуществляющий проекцию на i-е прямое слагаемое, а через $\mathfrak{h}_i$ — подалгебру $\pi_i(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_i$.

В работе доказано, что за исключением некоторых определенных случаев при $n_1 \leq \ldots \leq n_m$ все тавтологические действия $\mathfrak{h}_i : V_i$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ осуществляются только скалярными (над полем $\mathbb{F}$) операторами, т. е. выполнено соотношение

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-1\} \quad \mathfrak{h}_i \subset \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_i) \tag{1}$$

в случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и включение $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_m$ — в случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если* $i = 1, 2$, *и* $n_1 \leq \ldots \leq n_m$, *то* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_m$. *Если при этом* $\mathfrak{h} \neq 0$, *то* $n_m > n_1 \cdots n_{m-1}$.

Теорема 2. *Если* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $n_1 \leq \ldots \leq n_m$, *а соотношение (1) не выполняется, то* $m = 2$, *в алгебре* $\mathfrak{u}(V_1)$ *подалгебра* $\mathfrak{g}_1$ *совпадает с одной из подалгебр* $\mathfrak{u}(V_1)$ *и* $\mathfrak{su}(V_1)$, *а комплексное представление* $\mathfrak{g}_2 : V_2$ *неприводимо.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в разделе «Доказательства результатов».

Прежде всего убедимся в существенности ограничений, накладываемых на линейные группы в теоремах 1 и 2.

Исключения для теоремы 1. Допустим, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Приведем пример, когда $\mathfrak{h} \neq 0$. Если $m = 2$, $1 < n_1 < n_2 - 1$, а $G_2 = \mathbf{U}(V_2)$ — группа всех ортогональных операторов, то ограничение представления $\mathfrak{g} : V$ на подалгебру

$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{u}(V_2)$, изоморфное прямой сумме n_1 копий ее тавтологического представления, имеет нетривиальную с.п.о.п, откуда $\mathfrak{h} \neq 0$.

Исключения для теоремы 2. Приведем пример, когда не существует числа $i = 1, \ldots, m$, такого что тавтологическое действие $\mathfrak{h}_i : V_i$ осуществляется только скалярными (над полем $\mathbb{F}$) операторами; предварительно понадобится доказать несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим произвольное число $i = 1, \ldots, m$. Каноническое действие $G_i : S_i$ сдвигом аргумента изоморфно присоединенному действию $G_i : S(V_i)$, а соответствующее касательное представление $\mathfrak{g}_i : S_i$ — присоединенному действию $\mathfrak{g}_i : S(V_i)$. Если при этом $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то $S(V_i) = \mathbf{i} \cdot \mathfrak{u}(V_i)$, вследствие чего присоединенное действие $\mathfrak{g}_i : \mathfrak{u}(V_i)$ изоморфно присоединенному действию $\mathfrak{g}_i : S(V_i)$, а значит, и действию $\mathfrak{g}_i : S_i$.

Для произвольных $i, j = 1, \ldots, m$ естественным образом определено представление $G : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_i, V_j)$, $g : A \to g_j A g_i^{-1}$ и его дифференциал — представление $\mathfrak{g} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_i, V_j)$.

Предложение 1. *Если $m = 2$, то существует вещественно-линейный G-эквивариантный (и, как следствие, $\mathfrak{g}$-эквивариантный) изоморфизм $V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$, который для любого подпространства $V_2' \subset V_2$ (над полем $\mathbb{F}$) переводит подпространство $V_1 \otimes_{\mathbb{F}} V_2' \subset V$ в подпространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$.*

◄ Данный изоморфизм естественным образом устанавливается с помощью G_1-инвариантного скалярного умножения $f_1 \in P_1$. ►

Следствие 1. *Если $m = 2$, то $\mathfrak{h}$ есть с.п.о.п представления $\mathfrak{g} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$.*

Лемма 1. *Если $m = 2$ и $G_2 = \mathbf{U}(V_2)$, то для произвольного оператора $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ и формы $f \in S_1$, $f(x, y) := f_2(Ax, Ay)$, проекция подгруппы $G_A \subset G$ на прямой сомножитель G_1 совпадает с подгруппой $(G_1)_f$.*

◄ Пусть $g_1 \in G_1$ — произвольный элемент. Положим $B := A g_1^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$. Имеем $(g_1 f)(x, y) = f(g_1^{-1} x, g_1^{-1} y) = f_2(A g_1^{-1} x, A g_1^{-1} y) = f_2(Bx, By)$ $(x, y \in V_1)$ и поэтому

$$(f = g_1 f) \Leftrightarrow (\forall x, y \in V_1 \quad f_2(Ax, Ay) = f_2(Bx, By)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists g_2 \in \mathbf{U}(V_2) : A = g_2 B) \Leftrightarrow (\exists g_2 \in G_2 : A = g_2 A g_1^{-1}),$$

т. е. $(g_1 \in (G_1)_f) \Leftrightarrow (\exists g_2 \in G_2 : (g_1, g_2) \in G_A)$. ►

Следствие 2. *Если* $m=2$ *и* $G_2=\mathbf{U}(V_2)$, *то для всякого оператора* $A\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1,V_2)$ *и формы* $f\in S_1$, $f(x,y):=f_2(Ax,Ay)$, *имеем* $\pi_1(\mathfrak{g}_A)=$ $=(\mathfrak{g}_1)_f$.

Следствие 3. *Если* $m=2$, *то для всякого оператора* $A\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1,V_2)$ *и формы* $f\in S_1$, $f(x,y):=f_2(Ax,Ay)$, *имеем* $\pi_1(\mathfrak{g}_A)\subset(\mathfrak{g}_1)_f$.

Следствие 4. *Если* $m=2$ *и* $G_2=\mathbf{U}(V_2)$, *то представление* $\mathfrak{g}_1:S_1$ *обладает с.п.о.п, содержащейся в* $\mathfrak{h}_1$.

◄ Вытекает из следствий 1 и 2. ►

Следствие 5. *Если* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $m=2$ *и* $G_2=\mathbf{U}(V_2)$, *то присоединенное действие* $\mathfrak{g}_1:\mathfrak{u}(V_1)$ *обладает с.п.о.п, содержащейся в* $\mathfrak{h}_1$.

Предположим, что $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $m=2$ и $G_i=\mathbf{U}(V_i)$ при $i=1,2$. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{u}(V_1)$ имеет с.п.о.п размерности $\mathrm{rk}(\mathfrak{u}(V_1))=n_1$. В силу следствия 5 $\dim\mathfrak{h}_1\geq n_1$. Рассуждая аналогично, получаем $\dim\mathfrak{h}_i\geq n_i>1$ для любого $i=1,2$. Следовательно, не существует числа $i=1,2$, такого что $\mathfrak{h}_i\subset\mathbf{i}\mathbb{R}E\subset\mathfrak{u}(V_i)$.

Вспомогательные факты. В этом разделе приведены вспомогательные утверждения, необходимые для доказательств основных результатов.

Предложение 2. *Пусть* n,n',n'' *— натуральные числа, удовлетворяющие равенству* $n'+n''=n$, V *—* n*-мерное эрмитово пространство, а* $\mathfrak{u}(V)$ *— (вещественное) пространство всех косоэрмитовых операторов на нем. Тогда найдутся ортонормированные системы* $Q',Q''\subset V$, *такие что* $|Q'|=n'$, $|Q''|=n''$, *а любой оператор из* $\mathfrak{u}(V)$, *переводящий в себя каждую прямую* $\mathbb{C}e\subset V$, $e\in Q'\cup Q''$, *скалярный.*

◄ Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение эрмитова пространства V.

Пусть S — (вещественное) пространство всех эрмитовых комплексных $(n\times n)$-матриц. В этом пространстве подмножество P положительно определенных матриц открыто (в вещественной топологии). Рассмотрим матрицу $A\in S$, равную сумме всех матриц $E_{pq}+E_{qp}\in S$ $(p,q\in\mathbb{N}$, $p\leq n'<q\leq n)$. Поскольку $E\in P$, найдется число $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$, такое что $A':=E+\varepsilon A\in P$. В пространстве V существует базис $Q=\{e_1,\ldots,e_n\}$, матрицей Грама которого является матрица A'.

Системы $Q':=\{e_1,\ldots,e_{n'}\}$ и $Q'':=\{e_{n'+1},\ldots,e_n\}$ пространства V имеют единичные матрицы Грама, т. е. являются ортонормированными. Теперь пусть $\xi\in\mathfrak{u}(V)$ — произвольный оператор, переводящий в себя каждую из прямых $\mathbb{C}e\subset V$, $e\in Q'\cup Q''=Q$. Этот оператор записывается в базисе Q пространства V матрицей $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{i}\mathbb{R}$, а любые два его собственных вектора с различными собственными значениями ортогональны. Кроме того, для всякой пары $(p;q)$ $(p,\ q\in\mathbb{N},\ \ p\le n'<q\le n)$ имеем $(e_p,e_q)=\varepsilon\ne 0$, откуда $\lambda_p=\lambda_q$. Таким образом, каждое из чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n'}\in\mathbf{i}\mathbb{R}$ равно каждому из чисел $\lambda_{n'+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbf{i}\mathbb{R}$, откуда $\lambda_1=\ldots=$ $=\lambda_n$ и $\xi\in\mathbf{i}\mathbb{R}E\subset\mathfrak{u}(V)$. ►

Пусть G — вещественная группа Ли, а G' — ее компактная подгруппа. Рассмотрим присоединенное действие подгруппы $G'\subset G$ на алгебре $\mathfrak{g}:=\operatorname{Lie}G$. Подалгебра $\mathfrak{g}':=\operatorname{Lie}G'\subset\mathfrak{g}$, будучи инвариантным подпространством для указанного представления компактной группы G', обладает дополнительным G'-инвариантным подпространством $\mathfrak{p}$. Подпространства $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{p}$, очевидно, инвариантны относительно присоединенного действия $\mathfrak{g}':\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{m}$ ядро неэффективности представления $\mathfrak{g}':\mathfrak{p}$. Алгебра $\mathfrak{g}'$ компактна; то же можно сказать и о ее подалгебре $\mathfrak{m}$. Кроме того, $\mathfrak{m}$ есть наибольший из идеалов алгебры $\mathfrak{g}$, содержащихся в $\mathfrak{g}'$.

Пусть $\mathfrak{t}$ — максимальная коммутативная подалгебра (компактной) алгебры $\mathfrak{g}'$. Тогда с.п.о.п представления $\mathfrak{g}':\mathfrak{g}$ есть не что иное, как с.п.о.п представления $\mathfrak{t}:\mathfrak{p}$, т. е. подалгебра $\mathfrak{t}\cap\mathfrak{m}$, являющаяся максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $\mathfrak{m}$.

Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна. Обозначим через $\mathfrak{g}_0$ ее центр. Идеал $\mathfrak{m}$ равен прямой сумме идеала $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}'$ и всех простых компонент (полупростой) алгебры $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, содержащихся в $\mathfrak{g}'$. Из изложенного выше немедленно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть G — компактная группа Ли, $\mathfrak{g}_0$ — центр алгебры $\mathfrak{g}:=\operatorname{Lie}G$, а $G'\subset G$ — подгруппа Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{g}$. Тогда с.п.о.п присоединенного действия $\mathfrak{g}':\mathfrak{g}$ равна прямой сумме идеала $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}'$ и максимальных коммутативных подалгебр всех содержащихся в $\mathfrak{g}'$ простых компонент алгебры $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Доказательства результатов. Данный раздел посвящен доказательству теорем 1 и 2 в обозначениях и предположениях, приведенных в разделе «Введение».

Предложение 3. *Если $v\in V$ и $i=1,\ldots,m$, то в алгебре $\mathfrak{g}_i$ найдется подалгебра, сопряженная $\mathfrak{h}_i$ и содержащаяся в $\pi_i(\mathfrak{g}_v)$.*

◄ В алгебре $\mathfrak{g}$ существует подалгебра $\mathfrak{h}'$, сопряженная $\mathfrak{h}$ и содержащаяся в $\mathfrak{g}_v$. В свою очередь, в алгебре $\mathfrak{g}_i$ подалгебра $\pi_i(\mathfrak{h}')$ сопряжена $\mathfrak{h}_i$ и содержится в $\pi_i(\mathfrak{g}_v)$. ►

Пусть I — произвольное подмножество множества $\{1,\ldots,m\}$. Обозначим через V_I тензорное произведение пространств V_i, $i\in I$, над полем $\mathbb{F}$. Пусть S_I — вещественное пространство всех симметрических (соответственно эрмитовых) форм на пространстве V_I в случае $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{F}=\mathbb{C}$), а $P_I\subset S_I$ — подмножество всех положительно определенных форм. Скалярные умножения $f_i\in P_i$ на пространствах V_i $(i\in I)$ естественным образом индуцируют скалярное умножение $f_I\in P_I$ на пространстве V_I, тем самым наделяя последнее евклидовой (соответственно эрмитовой) структурой при $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{F}=\mathbb{C}$). Обозначим через G_I компактную группу Ли, равную декартову произведению компактных групп Ли G_i, $i\in I$, через $\mathfrak{g}_I$ — компактную алгебру Ли $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathfrak{g}_i=\operatorname{Lie}G_I$. Тавтологические представления $G_i:V_i$ и $\mathfrak{g}_i:V_i$ ($i\in I$) над полем $\mathbb{F}$ естественным образом индуцируют представления $R_I:G_I\to\mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V_I)$ и $\rho_I=dR_I:\mathfrak{g}_I\to\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V_I)$. В группе $\mathbf{GL}_{\mathbb{F}}(V_I)$ все операторы, сохраняющие скалярное умножение $f_I\in P_I$, образуют компактную подгруппу, которую обозначим через $\mathbf{U}(V_I)$. В алгебре $\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V_I)$, понимаемой как вещественная, обозначим через $\mathfrak{u}(V_I)$ подалгебру $\operatorname{Lie}\mathbf{U}(V_I)$. Из включений $G_i\subset\mathbf{U}(V_i)$ и $\mathfrak{g}_i\subset\mathfrak{u}(V_i)$ ($i\in I$) немедленно вытекает, что $R_I(G_I)\subset\mathbf{U}(V_I)$ и $\rho_I(\mathfrak{g}_I)\subset\mathfrak{u}(V_I)$. Наконец, обозначим через π_I гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g}\twoheadrightarrow\mathfrak{g}_I,\ \xi\to\sum\limits_{i\in I}\pi_i(\xi)$.

Случай двух компонент. Рассмотрим случай $m=2$.

Предложение 4. *Пусть $B\in S(V_1)$ — неотрицательно определенный оператор, а $V_2'\subset V_2$ — подпространство над полем $\mathbb{F}$, причем $\operatorname{rk}B\le\dim_{\mathbb{F}}V_2'$. Тогда найдется вектор $v\in V_1\otimes_{\mathbb{F}}V_2'\subset V$, такой что все операторы подалгебры $\pi_1(\mathfrak{g}_v)\subset\mathfrak{g}_1$ коммутируют с B.*

◄ Форма $f\in S_1$, $f(x,y):=f_1(x,By)$, неотрицательно определена и имеет ранг $\operatorname{rk}B\le\dim_{\mathbb{F}}V_2'$. Значит, найдется оператор $A\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1,V_2')$, такой что $f(x,y)=f_2(Ax,Ay)$ для любых $x,y\in V_1$. Согласно следствию 3, $\pi_1(\mathfrak{g}_A)\subset(\mathfrak{g}_1)_f=(\mathfrak{g}_1)_B=\{\xi\in\mathfrak{g}_1:\xi B=B\xi\}$. Осталось применить предложение 1. ►

Следствие 6. *Если $n_1\leqslant n_2$, то любой неотрицательно определенный оператор из $S(V_1)$ коммутирует со всеми операторами некоторой подалгебры вида $\pi_1(\mathfrak{g}_v)\subset\mathfrak{g}_1$, $v\in V$.*

Предложение 5. *Пусть Q — ортонормированная система пространства V_1, а $V_2'\subset V_2$ — подпространство над полем $\mathbb{F}$, причем $|Q|\le\dim_{\mathbb{F}}V_2'$. Тогда найдется вектор $v\in V_1\otimes_{\mathbb{F}}V_2'\subset V$, такой что любой* *оператор подалгебры* $\pi_1(\mathfrak{g}_v) \subset \mathfrak{g}_1$ *переводит в себя каждую из прямых* $\mathbb{F}e \subset V_1$, $e \in Q$.

◄ Рассмотрим неотрицательно определенный оператор $B \in S(V_1)$, действующий на подпространстве $\langle Q \rangle_{\mathbb{F}}^{\perp} \subset V_1$ тривиально, а на всех прямых $\mathbb{F}e \subset V_1$ $(e \in Q)$ — умножением на попарно различные вещественные положительные числа. Легко заметить, что $\operatorname{rk} B = |Q| \leq \dim_{\mathbb{F}} V_2'$. Каждая прямая $\mathbb{F}e \subset V_1$ $(e \in Q)$ как собственное подпространство оператора B инвариантна относительно всех операторов из $\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V_1)$, коммутирующих с B. Теперь остается применить предложение 4. ►

Следствие 7. *Пусть* Q *— ортонормированная система пространства* V_1, *удовлетворяющая неравенству* $|Q| \leq n_2$. *Тогда найдется вектор* $v \in V$, *такой что любой оператор подалгебры* $\pi_1(\mathfrak{g}_v) \subset \mathfrak{g}_1$ *переводит в себя каждую из прямых* $\mathbb{F}e \subset V_1$, $e \in Q$.

Следствие 8. *Пусть* Q *— ортонормированная система пространства* V_1, *удовлетворяющая неравенству* $|Q| \leq n_2$. *Тогда в алгебре* $\mathfrak{g}_1$ *найдется подалгебра, сопряженная* $\mathfrak{h}_1$, *всякий оператор которой переводит в себя каждую из прямых* $\mathbb{F}e \subset V_1$, $e \in Q$.

◄ Вытекает из следствия 7 и предложения 3. ►

Следствие 9. *В пространстве* V_1 *существует ортонормированная система* Q, *такая что* $|Q| = \min\{n_1; n_2\}$, *а любой оператор подалгебры* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ *переводит в себя каждую из прямых* $\mathbb{F}e \subset V_1$, $e \in Q$.

Следствие 10. *Если* $n_1 \leq n_2$, *то все операторы подалгебры* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ *имеют общий собственный ортонормированный базис.*

Следствие 11. *Если* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *и* $n_1 \leq n_2$, *то* $\mathfrak{h}_1 = 0$ (*что равносильно* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_2$).

◄ В силу следствия 10 все операторы подалгебры $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ имеют общий собственный ортонормированный базис. В этом базисе все операторы подалгебры $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{u}(V_1)$ записываются кососимметрическими матрицами, откуда $\mathfrak{h}_1 = 0$. ►

Предложение 6. *Если* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *и* $n_1 \leq n_2$, *то представление* $\mathfrak{g}_1 : S(V_1)$ *обладает с.п.о.п, содержащей* $\mathfrak{h}_1$.

◄ В пространстве $S(V_1)$ подмножество положительно определенных операторов открыто (в вещественной топологии) и непусто, а значит, плотно по Зарисскому. Поэтому существует положительно определенный оператор $B \in S(V_1)$, являющийся точкой общего положения для представления $\mathfrak{g}_1 : S(V_1)$. Пусть $\mathfrak{h}_1' \subset \mathfrak{g}_1$ — стационарная подалгебра данной точки, т. е. подалгебра всех операторов из $\mathfrak{g}_1$, коммутирующих с B. В силу следствия 6 для некоторого вектора $v \in V$ имеем $\pi_1(\mathfrak{g}_v) \subset \mathfrak{h}'_1$. Согласно предложению 3, в алгебре $\mathfrak{g}_1$ найдется подалгебра, сопряженная $\mathfrak{h}_1$ и содержащаяся в $\pi_1(\mathfrak{g}_v)$, а значит, и в с.п.о.п $\mathfrak{h}'_1$ представления $\mathfrak{g}_1 : S(V_1)$, что немедленно влечет требуемое. ►

Следствие 12. *Если* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *и* $n_1 \le n_2$, *то представление* $\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{u}(V_1)$ *обладает с.п.о.п, содержащей* $\mathfrak{h}_1$.

Лемма 3. *Предположим, что* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $n_1 \le n_2$, $\mathfrak{g}_1 \ne \mathfrak{u}(V_1)$ *и* $\mathfrak{g}_1 \ne \mathfrak{su}(V_1)$. *Тогда* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$.

◄ Применяя к компактной группе Ли $\mathbf{U}(V_1)$ и ее подгруппе Ли G_1 лемму 2, получаем, что с.п.о.п представления $\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{u}(V_1)$ содержится в $\mathbf{i}\mathbb{R}E$. Осталось воспользоваться следствием 12. ►

Лемма 4. *Если* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $n_1 \le n_2$, *а комплексное представление* $\mathfrak{g}_2 : V_2$ *приводимо, то подалгебра* $\mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$ *содержит некоторую подалгебру вида* $\pi_1(\mathfrak{g}_v) \subset \mathfrak{g}_1$, $v \in V$ *(и, как следствие, подалгебру* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$*)*.

◄ Поскольку $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{u}(V_2)$, пространство V_2 разлагается в прямую сумму нетривиальных $\mathfrak{g}_2$-инвариантных комплексных подпространств V'_2 и V''_2 размерностей соответственно n'_2 и n''_2. В свою очередь, представление $\mathfrak{g} : V$ также приводимо, пространство V разлагается в прямую сумму $\mathfrak{g}_2$-инвариантных подпространств $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V'_2$ и $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V''_2$, а стационарная подалгебра всякого вектора из V совпадает с пересечением стационарных подалгебр проекций этого вектора на указанные прямые слагаемые. В силу предложения 5 достаточно доказать, что в пространстве V_1 существуют ортонормированные системы Q' и Q'', такие что $|Q'| \le n'_2$, $|Q''| \le n''_2$, а любой оператор подалгебры $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{u}(V_1)$, переводящий в себя каждую из прямых $\mathbb{C}e \subset V_1$, $e \in Q' \cup Q''$, скалярный. Прежде всего выберем натуральные числа n' и n'', удовлетворяющие соотношениям $n' \le n'_2$, $n'' \le n''_2$ и $n' + n'' = n_1$. Это возможно, поскольку $2 \le n_1 \le n_2 = n'_2 + n''_2$. Согласно предложению 2, в пространстве V_1 существуют ортонормированные системы Q' и Q'', такие что $|Q'| = n'$, $|Q''| = n''$, а любой оператор алгебры $\mathfrak{u}(V_1)$, переводящий в себя каждую из прямых $\mathbb{C}e \subset V_1$, $e \in Q' \cup Q$, скалярный. При этом $|Q'| = n' \le n'_2$ и $|Q''| = n'' \le n''_2$. ►

Случай многих компонент. Рассмотрим случай произвольного числа m, большего 1.

Предложение 7. *Допустим, что* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. *Если* $n_i \le n_1 \cdots n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdots n_m$ *для некоторого* $i = 1, \ldots, m$, *то* $\mathfrak{h}_i = 0$.

◄ Имеем $\dim_{\mathbb{R}} V_i \le \dim_{\mathbb{R}} V_I$, где $I := \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \subset \{1, \ldots, m\}$. Применяя следствие 11 к компактным линейным группам $G_i \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V_i)$ и $R_I(G_I) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V_I)$, получаем, что $\pi_i(\mathfrak{h}) = 0$. ►

Следствие 13. *Если* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ *и* $n_1 \le \ldots \le n_m$, *то* $\mathfrak{h}_1 = \ldots = \mathfrak{h}_{m-1} = 0$.

Из предложения 7 и следствия 13 сразу вытекает теорема 1.

Лемма 5. *Если* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $m>2$ *и* $n_1 \le n_3 \cdots n_m$, *то* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$.

◄ В множестве $\{1,\ldots,m\}$ рассмотрим подмножества $I:=\{1,2\}$ и $J:=\{3,\ldots,m\}$.

В силу неравенства $n_1>1$ и предложения 2 в пространстве V_1 существуют ортонормированные системы $\{e_1\}$ и $\{e_2,\ldots,e_{n_1}\}$, такие что любой оператор из $\mathfrak{u}(V_1)$, переводящий в себя каждую из прямых $\mathbb{C}e_p \subset V_1$, $p=1,\ldots,n_1$, скалярный. Поскольку $n_2>1$, в пространстве V_2 имеется ортонормированная система $\{e_1', e_2'\}$. Положим $e_p' := e_2' \in V_2$ ($p=3,\ldots,n_1$) и $\tilde{e}_p := e_p \otimes e_p' \in V_I$ ($p=1,\ldots,n_1$). Ясно, что $Q:=\{\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_{n_1}\}$ — ортонормированная система пространства V_I. При этом, согласно условию, $|Q| \le \dim_{\mathbb{C}} V_J$. Применяя к компактным линейным группам $R_I(G_I) \subset \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V_I)$ и $R_J(G_J) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V_J)$ следствие 8, получаем, что в алгебре $\mathfrak{g}_I$ найдется подалгебра $\mathfrak{h}_I'$, сопряженная подалгебре $\mathfrak{h}_I := \pi_I(\mathfrak{h})$, всякий оператор которой переводит в себя каждую из прямых $\mathbb{C}\tilde{e}_p \subset V_I$, $p=1,\ldots,n_1$. Ясно, что $\pi_1(\mathfrak{h}_I) = \pi_1(\pi_I(\mathfrak{h})) = \pi_1(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$.

Пусть $\xi \in \mathfrak{h}_I'$ — произвольный элемент вида $\xi_1 + \xi_2$ ($\xi_1 \in \mathfrak{g}_1$, $\xi_2 \in \mathfrak{g}_2$). Если $p=1,\ldots,n_1$, то $(\xi_1 e_p) \otimes e_p' + e_p \otimes (\xi_2 e_p') = \xi(e_p \otimes e_p') = \xi\tilde{e}_p \in \mathbb{C}\tilde{e}_p = = \mathbb{C}(e_p \otimes e_p') \subset e_p \otimes V_2$, причем $e_p \otimes (\xi_2 e_p') \in e_p \otimes V_2$, откуда $(\xi_1 e_p) \otimes e_p' \in \in e_p \otimes V_2$, $\xi_1 e_p \in \mathbb{C}e_p \subset V_1$. Таким образом, оператор $\xi_1 \in \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{u}(V_1)$ переводит в себя каждую из прямых $\mathbb{C}e_p \subset V_1$, $p=1,\ldots,n_1$, и, как следствие, является скалярным: $\pi_1(\xi) = \xi_1 \in \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$. Ввиду произвольности элемента $\xi \in \mathfrak{h}_I'$ справедливо включение $\pi_1(\mathfrak{h}_I') \subset \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$. Наконец, учитывая, что подалгебры $\mathfrak{h}_I'$ и $\mathfrak{h}_I$ алгебры $\mathfrak{g}_I$ сопряжены, получаем, что $\mathfrak{h}_1 = \pi_1(\mathfrak{h}_I) \subset \mathbf{i}\mathbb{R}E \subset \mathfrak{u}(V_1)$. ►

Следствие 14. *Если* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $m>2$ *и* $n_1 \le \ldots \le n_m$, *то выполнено (1).*

Из лемм 3 и 4, а также следствия 14 вытекает теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли. *Функц. анализ и его прил.*, 1967, т. 1, № 4, с. 3–7.

[2] Элашвили А.Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли. *Функц. анализ и его прил.*, 1972, т. 6, № 1, с. 51–62.

[3] Элашвили А.Г. Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли. *Функц. анализ и его прил.*, 1972, т. 6, № 2, с. 65–78.

[4] Ильинский Д.Г. Стационарные подалгебры общего положения для локально сильно эффективных действий. *Матем. заметки,* 2010, т. 88, № 5, с. 689–707. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4408

[5] Попов А.М. Неприводимые простые линейные группы Ли с конечными стационарными подгруппами общего положения. *Функц. анализ и его прил.*, 1975, т. 9, № 4, с. 81–82.

[6] Попов А.М. Стационарные подгруппы общего положения для некоторых действий простых групп Ли. *Функц. анализ и его прил.*, 1976, т. 10. № 3, с. 88–90.

[7] Sato M., Kimura T. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 1977, vol. 65, pp. 1–155.
DOI: https://doi.org/10.1017/S0027763000017633

[8] Стырт О.Г. О простейших стационарных подалгебрах для компактных линейных алгебр Ли. *Тр. ММО*, 2012, т. 73, № 1, с. 133–150.

Стырт Олег Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Стырт О.Г. Стационарные подалгебры общего положения для тензорных произведений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 1 (88), с. 4–15. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-1-4-15

STATIONARY SUBALGEBRAS IN GENERAL POSITION FOR TENSOR PRODUCT

O.G. Styrt styrt@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper studies stationary subalgebras in general position of compact linear groups. We prove that, except for several specific cases, a stationary subalgebra in general position of a tensor product of real or complex compact group representations acts as a scalar on all tensor factors but possibly one. In the real case, it means that this stationary subalgebra in general position is contained in one of the direct summand subalgebras.

Keywords

Lie group, compact linear group, stabilizer in general position, stationary subalgebra in general position

We used the following concepts to solve this problem: conventional linear algebra arguments; theory of Lie groups, Lie algebras and their representations; and methods similar to those of solving similar problems for complex reductive linear groups

Received 31.01.2019
Accepted 16.09.2019

REFERENCES

[1] Andreev E.M., Vinberg É.B., Élashvili A.G. Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1967, vol. 1, iss. 4, pp. 257–261. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01076005

[2] Élashvili A.G. Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1972, vol. 6, iss. 1, pp. 44–53. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01075509

[3] Élashvili A.G. Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1972, vol. 6, iss. 2, pp. 139–148. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01077518

[4] Il'inskiy D.G. Stationary subalgebras in general position for locally strongly effective actions. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, iss. 5-6, pp. 661–677. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434610110064

[5] Popov A.M. Irreducible simple linear Lie groups with finite standard subgroups of general position. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1975, vol. 9, iss. 4, pp. 346–347. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01075890

[6] Popov A.M. Stationary subgroups of general position for certain actions of simple Lie groups. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1976, vol. 10, iss. 3, pp. 239–241. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01075537

[7] Sato M., Kimura T. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 1977, vol. 65, pp. 1–155. DOI: https://doi.org/10.1017/S0027763000017633

[8] Styrt O.G. The simplest stationary subalgebras, for compact linear Lie algebras. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2012, vol. 73, pp. 107–120. DOI: https://doi.org/10.1090/S0077-1554-2013-00199-5

Styrt O.G. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Styrt O.G. Stationary subalgebras in general position for tensor product. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 1 (88), pp. 4–15 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-1-4-15