

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ДРЕВОВИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

Г.А. Геворкян

hrgevorkian@mail.ru

Институт механики НАН РА, Ереван, Республика Армения

Аннотация

Проблематике оптимального моделирования упругих динамических систем в современной научной литературе уделяется пристальное внимание. К динамическим системам с разомкнутыми кинематическими цепями, в частности к упругим манипуляторам, адаптирована символично-рекурсивная модель метода Ньютона — Эйлера с обеспечением расчетных алгоритмов с характеристикой сложности, пропорциональной размерности этих систем, т. е. $O(n)$. При наличии у динамических систем замкнутых кинематических цепей распространение стратегии численного анализа без обращения матрицы масс оказывается крайне затруднительным. Следовательно, задача оптимального моделирования древовидных динамических систем сводится к поиску комбинированных стратегий, использующих одновременно процедуры стратегий с обращением и без обращения матриц масс. Приведена методика численного динамического анализа упругих древовидных многосвязных систем, совмещающая процедуру обращения матрицы масс с процедурой эффективного кинематического расчета, заимствованной из обобщенного метода Ньютона — Эйлера. Предложена приближенная методика динамического анализа, полностью воспроизводящая рекурсивные процедуры обобщенного метода Ньютона — Эйлера. Методика подтверждена в той степени, в которой период обращения этих систем меньше времени их полного функционирования, а размах перемещений в течение одного цикла оказывается меньше полного оборота механизма. Рассмотрено использование приближенной методики динамического анализа упругих механизмов на примере численного динамического расчета кривошипно-ползунного механизма с упругим шатуном

Ключевые слова

Метод Ньютона — Эйлера, динамическая система, упругие древовидные системы, множители Лагранжа, кривошипно-ползунный механизм, упругий шатун, деформации, голономная связь

Поступила 06.02.2019

Принята 25.11.2019

© Автор(ы), 2020

Введение. В последние десятилетия 20 века во множестве публикаций появились прогрессивные формализмы, позволяющие наиболее эффективным образом, придерживаясь характеристики сложности $O(n)$, осуществить численное решение прямой и обратной задач динамики многозвенных систем без обращения их матриц масс, в состав которых входили абсолютно жесткие звенья [1–4]. Стратегия эффективного численного расчета многозвенных динамических систем простой разомкнутой кинематической цепи получила название *метода Ньютона — Эйлера*.

Обобщения эффективных формализмов (*very efficient formulations*) на случай упругодеформируемых звеньев кинематической цепи приведены в [5–11]. Рекурсивная символьная модель численного решения первой задачи динамики манипуляторов с упругими звеньями предложена в [9], а рекурсивная символьная модель для случая смешанной (первой и второй) задачи динамики для того же простейшего класса упругих многозвенных систем — в [10]. Метод Ньютона — Эйлера, обобщенный на случай наличия в кинематической цепи упругих звеньев, получил название *обобщенный метод Ньютона — Эйлера* [8]. В последующей работе [11] обобщенный метод Ньютона — Эйлера был успешно применен к численному решению смешанной задачи динамики упругих древовидных многозвенных систем без внешних связей с сохранением степени сложности $O(n)$.

При распространении метода Ньютона — Эйлера сложнее всего дело обстоит с динамическими системами, содержащими замкнутые кинематические цепи. Результаты анализа показывают, что в этих случаях процедура обращения матриц масс исследуемого класса систем оказывается неизбежной. Это означает, что степень сложности наиболее эффективных алгоритмов уже не может быть пропорциональной размерности этих систем. Классический метод Лагранжа на уровне кинематического расчета предполагает вычисление тензора третьего ранга, что существенно загромождает вычислительный процесс в целом. Отсюда напрашивается идея гибридной стратегии динамического анализа, объединяющая кинематический и отчасти динамический расчет, проводимый на основе метода Ньютона — Эйлера, и процедуру обращения матрицы масс, свойственную методу Лагранжа. Исследованию упругих динамических систем с замкнутой кинематической цепью посвящены работы [12–14, 16, 17].

Цель работы — предложить общую и частную методики оптимизированного динамического расчета упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей с использованием и без использования процедуры обращения матрицы масс.

Постановка задачи и способы традиционного численного решения.

Процесс динамического анализа упругих древовидных динамических систем (рис. 1) сводится к численному решению системы нелинейных дифференциальных уравнений [5]:

$$f_i(\vec{\bar{x}}, \vec{\dot{\bar{x}}}, \vec{\ddot{\bar{x}}}, \vec{\bar{\lambda}}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad p = \sum_{j=1}^n N_j + n. \quad (1)$$

Здесь n — число обобщенных координат; N_j — число упругих степеней свободы звена C_j , связанного с предыдущим (C_{j-1}) и последующим (C_{j+1}) звеньями посредством одноподвижных кинематических пар V класса, совместно с алгебраическими уравнениями голономных связей

$$g_i(\vec{\bar{x}}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

относительно обобщенного вектор-аргумента

$$\vec{\bar{x}} = [\vec{\bar{x}}_1^T, \vec{\bar{x}}_2^T, \dots, \vec{\bar{x}}_n^T]^T,$$

где

$$\vec{\bar{x}}_i = [q_i^r, (\vec{q}_i^e)^T]^T, \quad \vec{q}_i^e = [q_{i,1}^e, q_{i,2}^e, \dots, q_{i,N_i}^e]^T,$$

индексы r и e образованы от слов *rigid* (жесткий) и *elastic* (упругий), и вектора неопределенных множителей Лагранжа $\vec{\bar{\lambda}} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T$.

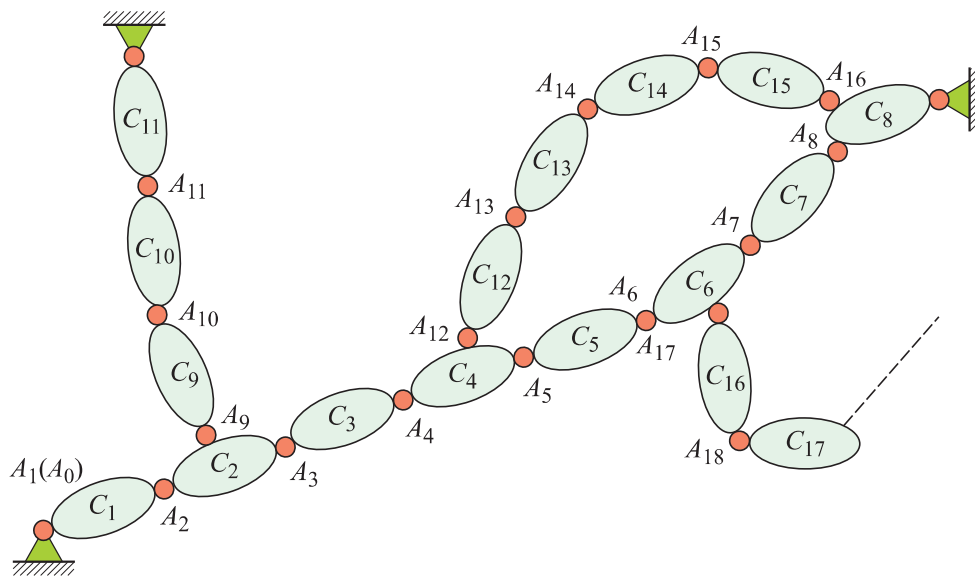


Рис. 1. Схема древовидной динамической системы с замкнутыми цепями

Число m в уравнениях связей (2) выражает число голономных ограничений, налагаемых на относительное движение звеньев приведенной на рис. 1 упругой динамической системы, состоящей из n линейно-упругих звеньев, связанных между собой вращательными или поступательными узлами [1].

Линеаризованная для момента времени $t \in [0, T]$ задача, аппроксимирующая систему нелинейных дифференциальных уравнений (1) при склерономных внешних связях (2), предполагает для каждого фиксированного момента времени t решение системы $p + m$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом искоемых неизвестных [5]:

$$\begin{aligned} F_i(\vec{x}, \vec{\lambda}) &= 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad p = \sum_{j=1}^n N_j + n; \\ \ddot{g}_k(\vec{x}) &= 0, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

где m — число дополнительных связей, налагаемых на всю древовидную динамическую систему. Подразумевается, что для рассматриваемого класса динамических систем имеет место неравенство: $m \leq 3\theta$, где θ — число входящих в состав динамической системы замкнутых кинематических контуров (см. рис. 1).

Формализация нового метода в динамике упругих систем. Из теории деформируемого тела известно, что малые линейные и угловые упругие перемещения (рис. 2) упругого звена C_j выражаются через варьируемые переменные на основе разложений Ритца [9]:

$$\begin{aligned} {}^j \ddot{u}_j(E_j, t) &= \sum_{i=1}^{N_j} {}^j \vec{\Phi}_{dj,i}(E_{0j}) q_{j,i}^e(t); \\ {}^j \vec{\Phi}_j(E_j, t) &= \sum_{i=1}^{N_j} {}^j \vec{\Phi}_{rj,i}(E_{0j}) q_{j,i}^e(t), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (4)$$

причем координатные функции ${}^j \vec{\Phi}_{dj,i}$ и ${}^j \vec{\Phi}_{rj,i}$, образующие в пространстве R_6 обобщенную матрицу координатных функций

$${}^j \Phi_j = \begin{bmatrix} {}^j \Phi_{dj} \\ {}^j \Phi_{rj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j \vec{\Phi}_{dj,1}(A_{0j+1}), {}^j \vec{\Phi}_{dj,2}(A_{0j+1}), \dots, {}^j \vec{\Phi}_{dj,N_j}(A_{0j+1}) \\ {}^j \vec{\Phi}_{rj,1}(A_{0j+1}), {}^j \vec{\Phi}_{rj,2}(A_{0j+1}), \dots, {}^j \vec{\Phi}_{rj,N_j}(A_{0j+1}) \end{bmatrix},$$

$$j \in \{1, \dots, n\},$$

подчинены векторному равенству ${}^j \vec{\Phi}_{rj,i}(E_{0j}) = \frac{1}{2} \text{rot } {}^j \vec{\Phi}_{dj,i}(E_{0j})$.

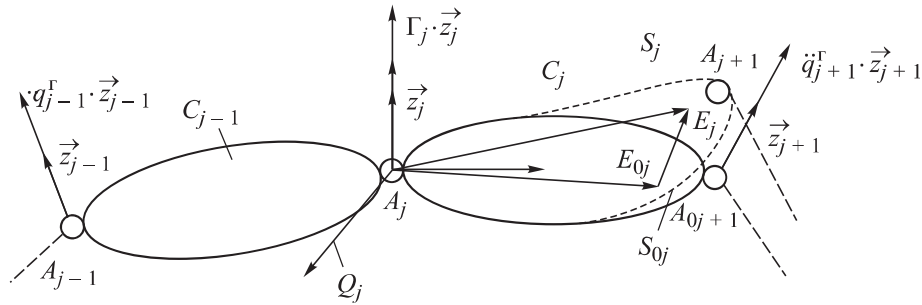


Рис. 2. Схема деформированного состояния упругого звена

К системе нелинейных дифференциальных уравнений вида (1) можно прийти в результате подстановки дважды продифференцированных уравнений связей между звеньями упругой динамической системы [7–9] (см. рис. 1), записанных в пространстве R_6

$${}^j \ddot{\mathbf{V}}_j = {}^j \mathbf{T}_{j-1} \cdot {}^{j-1} \ddot{\mathbf{V}}_{j-1} + {}^j \mathbf{R}_{j-1} {}^{j-1} \Phi_{j-1} \ddot{q}_{j-1}^e + \ddot{q}_j^r \mathbf{a}_j + {}^j \mathbf{h}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

в соответствующие уравнения динамического равновесия [9]

$$\begin{bmatrix} {}^j \mathbf{J}_{rrj} & {}^j \mathbf{J}_{rej} \\ {}^j \mathbf{J}_{erj} & {}^j \mathbf{J}_{eej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j \ddot{\mathbf{V}}_j^r \\ \ddot{q}_j^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j \mathbf{C}_{rj}^r \\ {}^j \mathbf{C}_{ej}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j \mathbf{F}_j - {}^{j+1} \mathbf{T}_j^T \cdot {}^{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \\ -{}^j \Phi_j^T \cdot {}^{j+1} \mathbf{R}_j^T \cdot {}^{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

В векторных уравнениях (5) и (6) приняты следующие обозначения матриц и векторов: ${}^j \mathbf{J}_{rrj}$, ${}^j \mathbf{J}_{rej}$, ${}^j \mathbf{J}_{erj}$, ${}^j \mathbf{J}_{eej}$ — составляющие блоки обобщенной матрицы инерции звена C_j как абсолютно жесткой и упругой совокупностей; ${}^{j+1} \mathbf{R}_j$, ${}^{j+1} \mathbf{T}_j$ — обобщенные матрицы поворота и преобразования подвижной системы отсчета Q_j звена C_j относительно подвижной системы отсчета Q_{j+1} звена C_{j+1} размерностей 6×6 ; ${}^{j+1} \mathbf{V}_j$, ${}^{j+1} \mathbf{F}_j$ — обобщенные векторы скоростей и усилий звена C_j , выраженные в подвижной системе отсчета Q_{j+1} , т. е.

$$\begin{aligned} {}^{j+1} \mathbf{V}_j &= [{}^{j+1} v_j^1, {}^{j+1} v_j^2, {}^{j+1} v_j^3, {}^{j+1} \omega_j^1, {}^{j+1} \omega_j^2, {}^{j+1} \omega_j^3]^T, \\ {}^{j+1} \mathbf{F}_j &= [{}^{j+1} f_j^1, {}^{j+1} f_j^2, {}^{j+1} f_j^3, {}^{j+1} m_j^1, {}^{j+1} m_j^2, {}^{j+1} m_j^3]^T; \end{aligned}$$

${}^j \mathbf{h}_j^r$, ${}^j \mathbf{h}_j^e$, ${}^j \mathbf{C}_{rj}^r$, ${}^j \mathbf{C}_{ej}^e$ — обобщенные векторы гироскопических и кориолисовых членов сцепления жесткой и упругой совокупностей звена C_j ; ${}^j \mathbf{a}_j$ —

обобщенный вектор, ${}^j\vec{\mathbf{a}}_j = \{[\sigma_j {}^j\vec{\mathbf{a}}_j]^T, [\bar{\sigma}_j {}^j\vec{\mathbf{a}}_j]^T\}^T$, ${}^i\vec{\mathbf{a}}_i$ — трехмерный единичный вектор, направленный вдоль оси движения i -й кинематической пары, σ_j — логическая переменная,

$$\sigma_j = 1 - \bar{\sigma}_j = \begin{cases} 0 & \text{кинематическая пара вращательная} \\ 1 & \text{кинематическая пара поступательная} \end{cases}.$$

Тогда объединением дифференциальных уравнений динамического равновесия звеньев упругих манипуляторов в форме Ньютона — Эйлера (6) после подстановки в них дважды продифференцированных уравнений связей с последующим исключением из этих уравнений внутренних усилий, действующих в сопряжениях звеньев, образуется система алгебродифференциальных уравнений (3). Эта система определяет движение упругой динамической системы при наличии голономных дополнительных связей, которая в матричной форме записи принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{0}_{n \times (H-n)} & \mathbf{M}_{r\lambda} \\ \mathbf{M}_{er} & \mathbf{M}_{ee} & \mathbf{M}_{e\lambda} \\ \mathbf{M}_{\lambda r} & \mathbf{M}_{\lambda e} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}^r \\ \ddot{\mathbf{Q}}^e \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}} + \bar{\mathbf{E}}_r \\ \bar{\mathbf{E}}_e \\ \bar{\mathbf{E}}_\lambda \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Вследствие исключения из системы предварительно линеаризованных для момента времени $t \in [0, T]$ дифференциальных уравнений (7) ускорений упругих переменных \ddot{q}_i^e , $i = 1, \dots, n$, получаем редуцированную систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных координат и неопределенных множителей Лагранжа [12]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr}^* & \mathbf{M}_{r\lambda}^* \\ \mathbf{M}_{\lambda r}^* & \mathbf{M}_{\lambda\lambda}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}^r \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}} + \bar{\mathbf{E}}_r^* \\ \bar{\mathbf{E}}_\lambda^* \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\ddot{\mathbf{Q}}^r = [\ddot{q}_1^r, \ddot{q}_2^r, \dots, \ddot{q}_n^r]^T$; $\bar{\mathbf{\Gamma}} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n]^T$.

Смешанная задача динамики упругих динамических систем. При построении численного решения смешанной задачи динамики упругих динамических систем с голономными дополнительными связями целесообразно выполнять предварительный кинематический расчет, воспользовавшись первой восходящей процедурой обобщенного метода Ньютона — Эйлера [7–11].

Представление кинематической модели упругих звеньев в форме Ньютона — Эйлера обладает важным преимуществом: эта модель позволя-

ет, придерживаясь степени сложности $O(n)$, наиболее эффективно осуществить кинематический расчет всех звеньев исследуемой системы по рекуррентной, линеаризованной для момента времени $t \in [0, T]$, формуле [9]:

$${}^j\vec{V}_j = {}^j\mathbf{T}_{j-1} \cdot {}^{j-1}\vec{V}_{j-1} + {}^j\mathbf{R}_{j-1} \cdot {}^{j-1}\Phi_{j-1} \cdot \vec{q}_{j-1}^e + \dot{q}_j^r \vec{a}_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Смешанная задача динамики [10, 11] упругих многозвенных древовидных систем с внешними голономными связями формулируется для линеаризованного для момента времени $t \in [0, T]$ матричного уравнения (8) следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{E}; \\ \mathbf{Dim}(\mathbf{R}) &= (n+m) \times (n+m); \quad \mathbf{Dim}(\vec{X}) = \mathbf{Dim}(\vec{E}) = n+m. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом учитываются принятые в (10) обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr}^X & \mathbf{M}_{r\lambda}^X \\ \mathbf{M}_{\lambda r}^X & \mathbf{M}_{\lambda\lambda}^X \end{bmatrix}; \\ \vec{X} &= [(\vec{Q}_X^r + \vec{\Gamma}_X)^T, \vec{\lambda}^T]^T; \quad \vec{E} = [(\vec{E}_r^X)^T, (\vec{E}_\lambda^X)^T]^T, \end{aligned}$$

где составные блоки результирующей матрицы \mathbf{R} и составного вектора \vec{E} подлежат однозначному определению из систем синтетических равенств:

$$\mathbf{M}_{rr}^X = \mathbf{Mat}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \begin{cases} \bar{\mathbf{M}}_{rr,ij}^X, & \text{если } \chi_j = 0 \\ -1, & \text{если } \chi_j = 1 \text{ и } i \neq j \\ 0, & \text{если } \chi_j = 1 \text{ и } i = j \end{cases},$$

$$\mathbf{M}_{\lambda r}^X = \mathbf{Mat}_{\substack{i=n+1, \dots, n+m \\ j=1, \dots, n}} \begin{cases} \bar{\mathbf{M}}_{\lambda r,ij}^X, & \text{если } \chi_j = 0 \\ 0, & \text{если } \chi_j = 1 \end{cases},$$

$$\mathbf{M}_{r\lambda}^X = \bar{\mathbf{M}}_{r\lambda}^X,$$

$$\mathbf{M}_{\lambda\lambda}^X = \bar{\mathbf{M}}_{\lambda\lambda}^X;$$

$$\vec{E}_r^X = \vec{E}_r^X + \vec{\Gamma}_A - \bar{\mathbf{M}}_{rr}^X \cdot \vec{Q}_A^r;$$

$$\vec{E}_\lambda^X = \vec{E}_\lambda^X - \bar{\mathbf{M}}_{\lambda r}^X \cdot \vec{Q}_A^r.$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{M}}_{rr}^X &= \mathbf{M}_{rr}, \\
 \bar{\mathbf{M}}_{r\lambda}^X &= \mathbf{M}_{r\lambda}, \\
 \bar{\mathbf{M}}_{\lambda r}^X &= \mathbf{M}_{\lambda r} - \mathbf{M}_{\lambda e} \cdot \mathbf{M}_{ee}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{er}, \\
 \bar{\mathbf{M}}_{\lambda\lambda}^X &= -\mathbf{M}_{\lambda e} \cdot \mathbf{M}_{ee}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{e\lambda}; \\
 \bar{\bar{\mathbf{E}}}_r^X &= \bar{\mathbf{E}}_r, \\
 \bar{\bar{\mathbf{E}}}_\lambda^X &= \bar{\mathbf{E}}_\lambda - \mathbf{M}_{\lambda e} \cdot \mathbf{M}_{ee}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{E}}_e; \\
 \mathbf{M}_{rr} &= \mathbf{A}^1, \\
 \mathbf{M}_{er} &= (\mathbf{J}^{er} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{J}^{rr}) \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{A}, \\
 \mathbf{M}_{ee} &= \mathbf{J}^{ee}, \\
 \mathbf{M}_{e\lambda} &= \mathbf{B}_e^{\text{T}}; \\
 \bar{\mathbf{E}}_r &= \bar{\Gamma}_A - \mathbf{A}^1 \cdot \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_A^r - \mathbf{A}^2 \cdot \bar{\gamma} + \mathbf{A}^3 \cdot \bar{\beta}^r, \\
 \bar{\mathbf{E}}_e &= \bar{\beta}^e - \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}^{-\text{T}} \cdot \bar{\beta}^r - (\mathbf{J}^{er} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{J}^{rr}) \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-\text{T}} \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{H}^{-\text{T}} \cdot \bar{\beta}^r + \bar{\gamma}^e), \\
 \bar{\mathbf{E}}_\lambda &= -(\dot{\mathbf{B}}_r \cdot \bar{\mathbf{Q}}^r + \dot{\mathbf{B}}_e \cdot \bar{\mathbf{Q}}^e) + \bar{\xi},
 \end{aligned}$$

где $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t)$ — функция, под которой понимается некоторая векторная зависимость от времени, отражающая вероятное наличие дополнительных связей реономного типа;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-1} \cdot \mathbf{J}^{rr} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I}^a; \\
 \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-1} \cdot \mathbf{J}^{rr} \cdot \mathbf{H}^{-1}; \\
 \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-1}; \\
 \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{H}^{\text{T}} + \mathbf{J}^{rr} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{L} \approx \mathbf{H}^{\text{T}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \text{Diag}_{i=1, \dots, n} \left({}^i \mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \boldsymbol{\Phi}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \mathbf{J}_{eei-1}^{-1} \cdot {}^{i-1} \boldsymbol{\Phi}_{i-1}^{\text{T}} \cdot {}^i \mathbf{R}_{i-1}^{\text{T}} \right).$$

Учитываются следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\mathbf{Q}}}^r &= \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_X^r + \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_A^r, \\
 \bar{\bar{\Gamma}} &= \bar{\bar{\Gamma}}_X + \bar{\bar{\Gamma}}_A,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{Q}}_X^r &= [(1-\chi_1)\ddot{q}_1^r, (1-\chi_2)\ddot{q}_2^r, \dots, (1-\chi_n)\ddot{q}_n^r]^T, \\ \ddot{\mathbf{Q}}_A^r &= [\chi_1\ddot{q}_1^r, \chi_2\ddot{q}_2^r, \dots, \chi_n\ddot{q}_n^r]^T; \\ \bar{\mathbf{\Gamma}}_X &= [\chi_1\Gamma_1, \chi_2\Gamma_2, \dots, \chi_n\Gamma_n]^T, \\ \bar{\mathbf{\Gamma}}_A &= [(1-\chi_1)\Gamma_1, (1-\chi_2)\Gamma_2, \dots, (1-\chi_n)\Gamma_n]^T\end{aligned}$$

в силу логической переменной [9]

$$\chi_j = \begin{cases} 0, & \text{если в паре } j \text{ задано обобщенное усилие } \Gamma_j \\ 1, & \text{если в паре } j \text{ задано обобщенное ускорение } \ddot{q}_j^r \end{cases},$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Остается разъяснить *структурную матрицу преобразования* \mathbf{H} , которая в общем случае упругой древовидной системы имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6}^d & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -{}^2\tilde{\mathbf{S}}_1 & \mathbf{I}_{6 \times 6}^d & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ {}^3\tilde{\mathbf{S}}_1 & -{}^3\tilde{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{I}_{6 \times 6}^d & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{n-1}\tilde{\mathbf{S}}_1 & {}^{n-1}\tilde{\mathbf{S}}_2 & {}^{n-1}\tilde{\mathbf{S}}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_{6 \times 6}^d & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ {}^n\tilde{\mathbf{S}}_1 & {}^n\tilde{\mathbf{S}}_2 & {}^n\tilde{\mathbf{S}}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & -{}^n\tilde{\mathbf{S}}_{n-1} & \mathbf{I}_{6 \times 6}^d \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{Dim}(\mathbf{H}) = 6n \times 6n,$$

где ${}^j\tilde{\mathbf{S}}_i = {}^j\mathbf{S}_i$ при ${}^j\mathbf{S}_i = {}^j\mathbf{T}_i - {}^j\mathbf{R}_i \cdot {}^i\Phi_i \cdot {}^i\mathbf{J}_{eei}^{-1} \cdot {}^i\mathbf{J}_{eri}$, если звенья C_i и C_j входят друг с другом в подвижное соединение; ${}^j\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{0}_{6 \times 6}$, если звенья C_i и C_j не образуют кинематической пары.

Нетрудно установить, что главный недостаток предложенного метода заключается в необходимости обращения на каждом этапе численного интегрирования матрицы $\mathbf{\Omega}$, определяемой зависимостью (11) и имеющей размерность $6n \times 6n$. При выполнении условия малости функций форм ${}^j\bar{\Phi}_{dj,i}$, $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, N_j$, матрица $\mathbf{\Omega}$ ассимилируется с матрицей \mathbf{H}^T , а в ней самой матрицы ${}^j\mathbf{S}_i$ отождествляются с матрицами ${}^j\mathbf{T}_i$. Однако

эти упрощения не облегчают задачи, поскольку в таком случае требуется обращать имеющую одинаковую с ней размерность $6n \times 6n$ матрицу \mathbf{H}^T . В связи с принятой аппроксимацией (11) только при исследовании систем простой замкнутой кинематической цепи возможно определить матрицу $\mathbf{\Omega}^{-1} \approx \mathbf{H}^{-T}$ чисто аналитически, что полностью избавляет методику от свойственного ей главного недостатка.

Следует также отметить, что все непоясненные символы, входящие в матричные блоки уравнения (10), образуются в результате очевидных последовательного и диагонального объединений компонент одноименных шестимерных векторов и матриц обобщенного метода Ньютона — Эйлера [9].

Комбинированный метод динамического анализа упругих систем. Обобщая изложенное выше, рассмотрим общую схему вычислительного процесса динамического анализа упругих систем простой замкнутой кинематической цепи (см. рис. 1), предполагающих наличие голономных дополнительных связей. Этот процесс, обладающий степенью сложности $O(n^2)$, для каждого момента времени $t \in [0, T]$ предполагает:

1) кинематический расчет звеньев кинематических цепей, пользуясь первой восходящей рекурсией обобщенного метода Ньютона — Эйлера по рекуррентной формуле (9) [9];

2) определение обобщенных ускорений и обобщенных усилий в кинематических парах посредством обращения матрицы масс на основании решения (10);

3) нахождение всех прочих динамических характеристик, осуществляя третью восходящую рекурсию обобщенного метода Ньютона — Эйлера [9].

Случай упругих древовидных динамических систем без внешних связей. Посредством освобождения упругой древовидной динамической системы (см. рис. 1) от присущих ей внешних голономных ограничений образуется представленная на рис. 3 упругая древовидная динамическая система без внешних связей. Главная отличительная особенность последней по отношению к исходной — число основных степеней свободы избавленной от внешних связей древовидной динамической системы равно числу ее подвижных звеньев, поскольку сопряжения между звеньями изначально предполагаются строго одноподвижными.

Вследствие введения в базовый обобщенный формализм Ньютона — Эйлера для упругих манипуляторов [9] математической модели «узлового» звена достигается полная формализация обобщенного метода Ньютона — Эйлера для упругих древовидных динамических систем без внешних

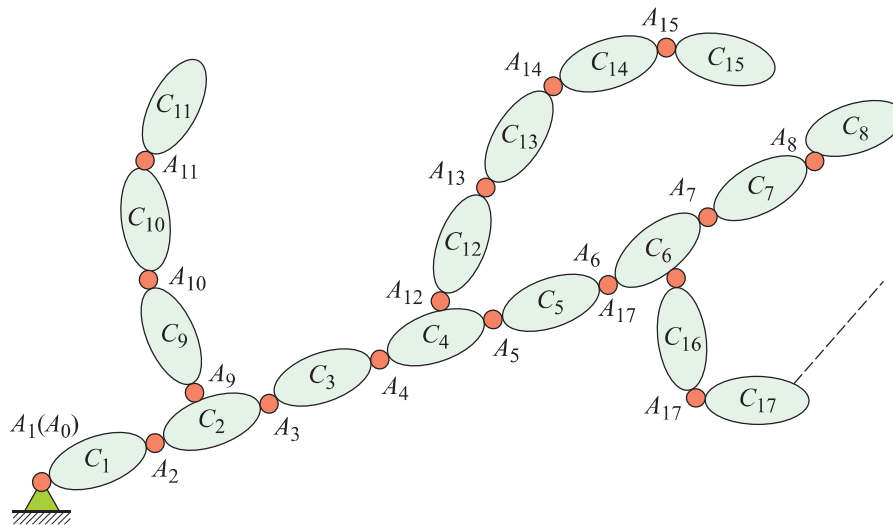


Рис. 3. Схема древовидной динамической системы без внешних связей

связей с сохранением степени сложности алгоритмов, пропорциональной размерности, т. е. $O(n)$ (см. [11]). Таким образом, схема расчетного алгоритма степени сложности $O(n)$ упругих древовидных динамических систем для каждого момента времени $t \in [0, T]$ предусматривает [11]:

- 1) кинематический расчет звеньев кинематических цепей (определение угловых и, если требуется, линейных скоростей звеньев), пользуясь первой восходящей рекурсией обобщенного метода Ньютона — Эйлера;
- 2) символьный расчет (вычисление итеративно-символьных вспомогательных параметров) в силу второй нисходящей рекурсии обобщенного метода Ньютона — Эйлера;
- 3) динамический расчет кинематических цепей (нахождение линейных и угловых ускорений звеньев и, если требуется, внутренних усилий в сопряжениях) путем осуществления третьей восходящей рекурсии обобщенного метода Ньютона — Эйлера.

Приближенный метод динамического анализа упругих механизмов.

В процессе динамического анализа упругих многозвенных древовидных систем с внешними голономными связями особый интерес представляет идея оптимизации, известная в аналитической механике под названием «принцип освобожденности связей» и заключающаяся в сведении линеаризованной задачи с ограничениями (3) к упрощенной задаче анализа некоторой ее формально-свободной модели обобщенным методом Ньютона — Эйлера. Эта стратегия упрощенного численного решения задачи (3), снабжающая составленные на ее основе алгоритмы степенью сложности $O(n)$, успешно применяется в динамике упругих систем.

Указанный выше приближенный метод для каждого момента времени $t \in [0, T]$ предполагает определение из системы линеаризованных алгебро-дифференциальных уравнений движения исходной упругой динамической системы усилий внешних связей

$$\vec{\Lambda}(t) = \mathbf{M}_{r\lambda} \cdot \vec{\lambda}(t), \quad t \in [0, T], \quad (13)$$

с последующим их приложением к аналоговой системе в качестве внешних силовых факторов (рис. 4, *а* и *б*). Эта концепция оказывается справедлива в той мере, в какой упругие перемещения и деформации звеньев механизмов удовлетворяют условию малости. В связи с необходимостью вычисления усилий связей (13) для всего времени функционирования $t \in [0, T]$ реальной системы предлагаемая стратегия оптимизации лишилась бы всякой целесообразности. Следовательно, предложенная концепция оптимизации представляет интерес не для произвольных упругих динамических систем с внешними связями, а лишь для ограниченного их класса, обусловленного циклическим характером движения формально-жестких аналогов этих систем.

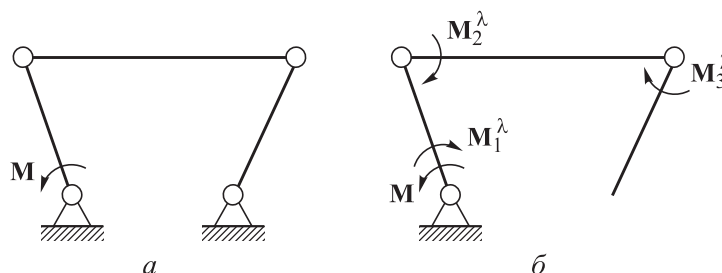


Рис. 4. Шарнирный четырехзвенник (*а*) и его формально-свободная модель (*б*)

Методика упрощенного динамического анализа предусматривает определение усилий связей (13) не для всего промежутка действия заданной упругой системы $t \in [0, T]$, а для частичных интервалов $t \in [0, k\tau]$, $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$, где τ — период ее обращения. Немаловажно, чтобы диапазон (размах) перемещений системы при совершении одного цикла был как можно меньше полного обращения системы, т. е. $\alpha \ll 2\pi$. Из этого следует, что эффективность идеи упрощенного динамического анализа упругих механизмов произвольной структуры обобщенным методом Ньютона — Эйлера подтверждается в той степени, в какой период обращения этих систем меньше времени их полного функционирования ($\tau \ll T$), а размах перемещений в течение одного цикла оказывается меньше полного оборота механизма ($\alpha \ll 2\pi$).

Для наглядности оценки приближенного метода приведена сравнительная характеристика [15] на примере решения смешанной задачи динамики механизмов простой разомкнутой кинематической цепи (манипуляторов), состоящих из абсолютно жестких звеньев, методом Ньютона — Эйлера (кривая 1, рис. 5) и комбинированным методом Ньютона — Эйлера и Лагранжа (кривая 2, рис. 5).

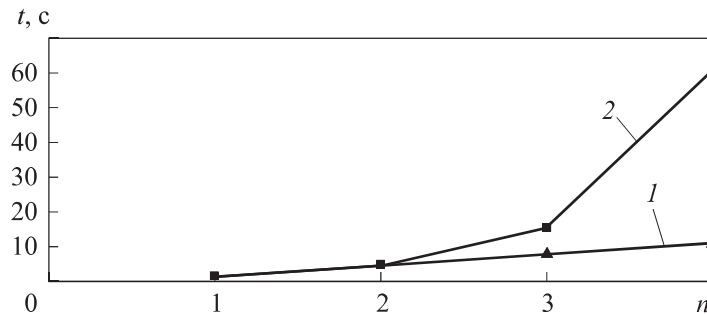


Рис. 5. Сравнительная характеристика методов $O(n)$ (1) и $O(n^2)$ (2)

Пример численной реализации предлагаемой методики. Рассмотрим численную реализацию представленного приближенного метода динамического анализа упругих механизмов с внешними голономными связями без обращения их матриц масс на примере динамического моделирования кривошипно-ползунного механизма с жестким кривошипом A_3A_4 и упругим шатуном A_2A_3 (рис. 6) [18].

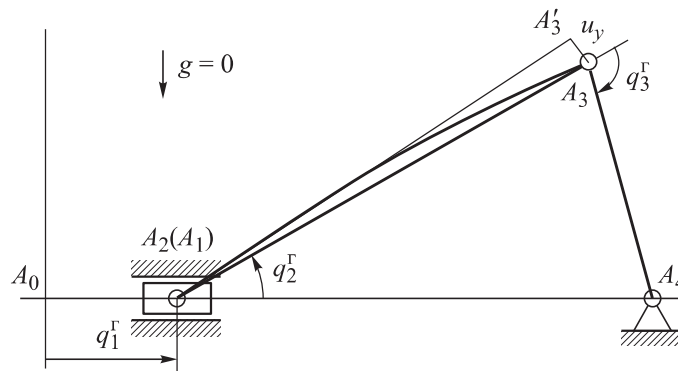


Рис. 6. Схема кривошипно-ползунного механизма с упругим шатуном

Учитывая геометрические и физико-механические характеристики звеньев ($r_i = 3,0 \cdot 10^{-3}$ м, $i = 2, 3$; $l_2 = 0,35$ м, $l_3 = 0,15$ м; $m_1 = 0,1$ кг; $\rho_2 = \rho_3 = 7800$ кг/м³, $E_2 = 200$ МПа), а также начальные условия движения

механизма в обобщенных координатах и их скоростях ($q_1^r(0) = 0$, $q_2^r(0) = 0,432$ рад, $q_3^r(0) = -1,787$ рад; $\dot{q}_1^r(0) = 80l_3$, $\dot{q}_i^r(0) = 0$, $i = 2,3$) и в упругой переменной и ее скорости ($q_2^e(0) = \dot{q}_2^e(0) = 0$ при $N_2 = 1$), проведен тест функционирования механизма в интервале $t \in [0; 0,07$ с] с заданным законом движения ползуна A_1A_2

$$q_1^r(t) = 0,8l_3 \sin(100t) \quad (14)$$

при наличии стационарных геометрических связей

$$\begin{aligned} (0,35 - q_1^r) \sin(q_2^r + q_3^r) - l_2 \sin q_3^r &= 0; \\ l_3 \sin(q_2^r + q_3^r) + l_2 \sin q_3^r &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Зависимости обобщенной силы Γ_1 и упругого перемещения $u_2(A_3)$ от времени приведены на рис. 7. Следует отметить, что кривые 1 и 2 на рис. 7, б

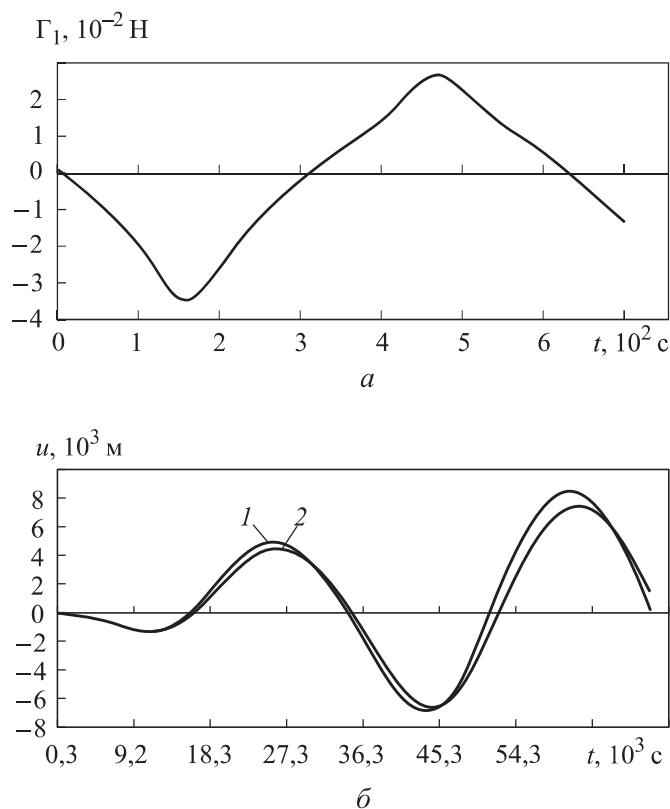


Рис. 7. Зависимости обобщенной силы (а) и упругого перемещения (б) шатуна от времени:

1, 2 — упругие перемещения концевой точки A_3 шатуна

представляют собой упругие перемещения концевой точки A_3 шатуна, которые рассчитаны с помощью кодов, составленных на основе приближенной $O(n)$ и точной $O(n^2)$ методик динамического анализа.

При реализации приближенного метода к формально-свободной системе приложены усилия внешних связей, присущие заданному движению аналогового кривошипно-ползунного механизма с абсолютно жестким шатуном. На графике рис. 7, *a* заметны некоторые искажения функции обобщенной силы Γ_1 вследствие учета упругости шатуна. Зависимость обобщенной силы Γ_1 от времени при недеформируемом шатуне приведена на рис. 8, *a*, сравнительная характеристика зависимостей той же обобщенной силы Γ_1 от времени при упругом и абсолютно жестком шатуне — на рис. 8, *б*. Следует отметить, что колебания упругого перемещения $u_2(A_3)$ превосходят по частоте колебания обобщенной силы Γ_1 . Это свидетельствует о сопутствующем характере упругих колебаний.

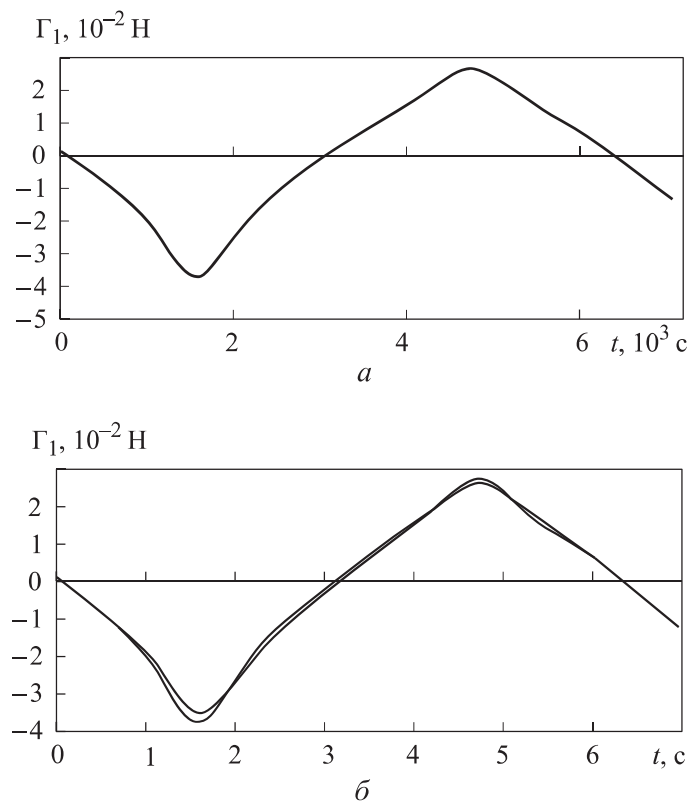


Рис. 8. Зависимость обобщенной силы при абсолютно жестком шатуне (*a*) и совмещенные зависимости обобщенной силы (*б*) при упругом и недеформируемом шатуне

Результаты тестирования согласуются с результатами численной реализации контрольного примера, приведенного в [18]. Характеристикой точности воспроизведения функции упругого перемещения во времени является псевдопериодичность ее зависимости от времени (рис. 9) при численном решении той же задачи в интервале $t \in [0; 2 \text{ с}]$ функционирования механизма [17].

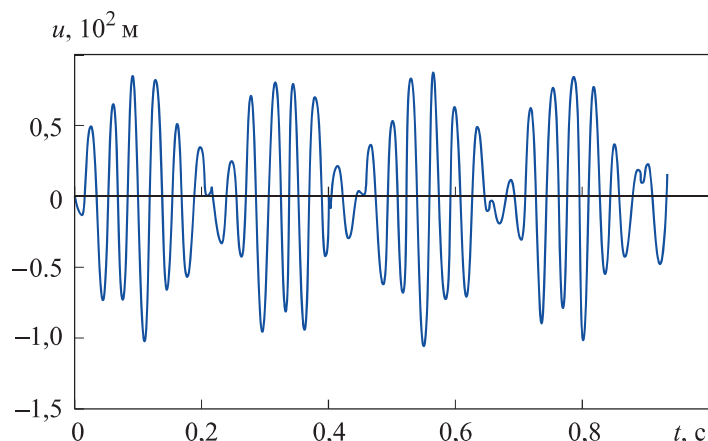


Рис. 9. Псевдопериодическая функция упругих перемещений шатуна

Заключение. Представлена методика динамического анализа упругих древовидных многозвенных систем с внешними голономными связями. Разработанная методика, включающая в себя процедуры кинематического и динамического расчетов в соответствии с символьно-рекурсивной стратегией Ньютона — Эйлера, избавлена от основных недостатков классического метода Лагранжа, которые сопряжены с необходимостью проведения громоздких кинематических вычислений. В дальнейшем выдвинута приближенная стратегия полной формализации обобщенного метода Ньютона — Эйлера применительно к динамическому анализу произвольной структуры упругих механизмов с внешними голономными связями. Отмеченная стратегия вносит ощутимый вклад в выигрыш машинного времени при моделировании движения указанного класса упругих динамических систем, действующих в широких интервалах функционирования. Показано, что ожидаемый вклад в быстродействие вычислительного процесса тем больше, чем меньше период обращения механизма и размах его перемещений в течение одного цикла по сравнению со временем его полного функционирования и полным его оборотом: $\tau \ll T$ и $\alpha \ll 2\pi$. Во всех случаях точность моделирования оказывается тем выше, чем больше степень малости упругих перемещений звеньев механизма.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.P.C. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, 1980, vol. 102, iss. 2, pp. 69–76.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3149599>
- [2] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. Robot. Res.*, 1983, vol. 2, iss. 1, pp. 13–30.
DOI: <https://doi.org/10.1177%2F027836498300200102>
- [3] Dombre E., Khalil W. *Modélisation et commande des robots*. Paris, Hermès, 1988.
- [4] Dombre E., Khalil W. *Modélisation, identification et commande des robots*. Paris, Hermès, 1999.
- [5] Verlinden O., Dehombreux P., Conti C., et al. A new formulation for the direct dynamic simulation of flexible mechanisms based on the Newton — Euler inverse method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1994, vol. 37, iss. 19, pp. 3363–3387.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371910>
- [6] Fiset P., Samin J.-C. Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicite Newton/Euler recursive scheme. *Arch. Appl. Mech.*, 1996, vol. 66, iss. 3, pp. 187–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00795220>
- [7] Boyer F., Coiffet P. Generalization of Newton — Euler model for flexible manipulators. *Int. J. Robot. Syst.*, 1996, vol. 13, iss. 1, pp. 11–24. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199601\)13:1%3C11::AID-ROB2%3E3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199601)13:1%3C11::AID-ROB2%3E3.0.CO;2-Y)
- [8] Boyer F., Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton — Euler model. *Mech. Mach. Theory*, 1996, vol. 31, no. 1, pp. 45–56.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(95\)00038-Z](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00038-Z)
- [9] Boyer F., Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics. *Int. J. Robot. Res.*, 1998, vol. 17, iss. 3, pp. 282–293.
DOI: <https://doi.org/10.1177%2F027836499801700305>
- [10] Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н. и др. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона — Эйлера. *Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН*, 2004, т. 57, № 1, с. 3–10.
- [11] Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей. *Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН*, 2006, т. 59, № 1, с. 3–9.
- [12] Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей. *Information Technologies and Management*, 2004, № 4, с. 36–43.
- [13] Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизмов с упругими звеньями переменной длины. *Вестник ГИУА. Серия: Механика, Машиноведение, Машиностроение*, 2014, № 1, с. 34–41.

- [14] Геворкян Г.А. Приложение обобщенного метода Ньютона — Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов. *Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН*, 2010, т. 63, № 2, с. 133–138.
- [15] Геворкян Г.А. Об одной разновидности динамического анализа манипуляторов посредством обращения их матрицы масс. *Матер. V междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды»*. Цахкадзор, НУАСА, с. 61–62.
- [16] Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном. *Сб. тр. VIII междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред»*. Горис-Степанакерт, 2014, с. 143–147.
- [17] Геворкян Г.А. Анализ периодичности упругих перемещений шатуна в процессе движения кривошипно-ползунного механизма без учета диссипативных сил. *Сб. тр. VI междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды»*. Дилижан, 2019, с. 111–114.
- [18] Gofron M., Shabana A.A. Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems. *Nonlinear Dyn.*, 1993, vol. 4, no. 2, pp. 183–206.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00045253>

Геворкян Грант Араратович — канд. техн. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА (Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, д. 24).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Геворкян Г.А. Моделирование упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 2 (89), с. 4–24.
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-4-24>

SIMULATION OF ELASTIC TREE-LIKE DYNAMIC SYSTEMS IN PRESENCE OF EXTERNAL HOLONOMIC CONSTRAINTS

H.A. Gevorkian

hrgevorkian@mail.ru

**Institute of Mechanics, National Academy of Sciences,
Yerevan, Republic of Armenia**

Abstract

Modern scientific literature pays close attention to the problems of optimal modeling of elastic dynamic systems. The symbolic-recursive model of Newton — Euler method with the provision of computational algorithms with a degree of complexity proportional to the dimension of these systems, i.e., $O(n)$, has been adapted for dynamic systems with open kinematic

Keywords

Newton — Euler method, dynamic system, elastic tree-like systems, Lagrange multipliers, slider-crank mechanism, elastic connecting rod, deformations, holonomic constraint

chains, in particular, for elastic manipulators. If dynamic systems have closed kinematic chains, it is extremely difficult to propagate the strategy of numerical analysis without the mass matrix inversion. Consequently, the task of optimal modeling of tree-like dynamic systems is reduced to the search for combined strategies that use the procedures of strategies with and without inversion of mass matrices simultaneously. The paper introduces a method of numerical dynamic analysis of elastic tree-like multilink systems, the method combining the procedure of inverting the mass matrix with the procedure of effective kinematic calculation, borrowed from the generalized Newton — Euler method. An approximate dynamic analysis technique is proposed that fully reproduces the recursive procedures of the generalized Newton — Euler method. The technique is confirmed to the extent that the period of inversion of these systems is less than the time of their full functioning, and the range of displacements during one cycle is less than the complete revolution of the mechanism. The use of the approximate method for the dynamic analysis of elastic mechanisms is considered using the example of a numerical dynamic calculation of a slider-crank mechanism with an elastic connecting rod

Received 06.02.2019

Accepted 25.11.2019

© Author(s), 2020

REFERENCES

- [1] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.P.C. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, 1980, vol. 102, iss. 2, pp. 69–76.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3149599>
- [2] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. Robot. Res.*, 1983, vol. 2, iss. 1, pp. 13–30.
DOI: <https://doi.org/10.1177%2F027836498300200102>
- [3] Dombre E., Khalil W. *Modélisation et commande des robots*. Paris, Hermès, 1988.
- [4] Dombre E., Khalil W. *Modélisation, identification et commande des robots*. Paris, Hermès, 1999.
- [5] Verlinden O., Dehombreux P., Conti C., et al. A new formulation for the direct dynamic simulation of flexible mechanisms based on the Newton — Euler inverse method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1994, vol. 37, iss. 19, pp. 3363–3387.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371910>
- [6] Fisette P., Samin J.-C. Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicite Newton/Euler recursive scheme. *Arch. Appl. Mech.*, 1996, vol. 66, iss. 3, pp. 187–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00795220>

- [7] Boyer F., Coiffet P. Generalization of Newton — Euler model for flexible manipulators. *Int. J. Robot. Syst.*, 1996, vol. 13, no. 1, pp. 11–24. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199601\)13:1%3C11::AID-ROB2%3E3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199601)13:1%3C11::AID-ROB2%3E3.0.CO;2-Y)
- [8] Boyer F., Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton — Euler model. *Mech. Mach. Theory*, 1996, vol. 31, iss. 1, pp. 45–56. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(95\)00038-Z](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00038-Z)
- [9] Boyer F., Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics. *Int. J. Robot. Res.*, 1998, vol. 17, iss. 3, pp. 282–293. DOI: <https://doi.org/10.1177%2F027836499801700305>
- [10] Sarkisyan Yu.L., Stepanyan K.G., Azuz N., et al. Dynamic analysis of flexible manipulators using the generalized Newton — Euler method. *Izv. NAN RA i GIUA. Ser. TN* [Proceedings of the NAS RA and SEUA: Technical Sciences], 2004, vol. 57, no. 1, pp. 3–10 (in Russ.).
- [11] Sarkisyan Yu.L., Stepanyan K.G., Gevorkian H.A. Dynamic analysis of flexible tree-like mechanical systems without external constraints. *Izv. NAN RA i GIUA. Ser. TN* [Proceedings of the NAS RA and SEUA: Technical Sciences], 2006, vol. 59, no. 1, pp. 3–9 (in Russ.).
- [12] Gevorkian H.A. Dynamic analysis of elastic tree-like mechanical systems with external holonomic constraints. *Information Technologies and Management*, 2004, no. 4, pp. 36–43 (in Russ.).
- [13] Gevorkian H.A. Dynamic modeling of mechanisms with elastic links of variable length. *Vestnik GIUA. Seriya: Mekhanika, Mashinovedenie, Mashinostroenie* [Proceedings of National Polytechnic University of Armenia — Mechanics, Machine Science, Machine Building], 2014, no. 1, pp. 34–41 (in Russ.).
- [14] Gevorkian H.A. An application of the generalized Newton — Euler method in the optimal control problems of flexible mechanisms. *Izv. NAN RA i GIUA. Ser. TN* [Proceedings of the NAS RA and SEUA: Technical Sciences], 2010, vol. 63, no. 2, pp. 133–138 (in Russ.).
- [15] Gevorkian H.A. [On a kind of dynamical analysis of manipulators by means of their mass matrix inversion]. *Mater. V mezhdunar. konf. "Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy"* [Proc. V Int. Conf. Actual Problems of Continuum Mechanics]. Tsakhkadzor, NUASA Publ., pp. 61–62 (in Russ.).
- [16] Gevorkian H.A. [Dynamical modelling of four-bar linkage mechanism with elastic piston rod]. *Sb. tr. VIII mezhdunar. konf. "Problemy dinamiki vzaimodeystviya deformiruemyykh sred"* [Proc. VIII Int. Conf. Problems of Interaction Dynamics of Deformable Medium]. Goris-Stepanakert, 2014, pp. 143–147 (in Russ.).
- [17] Gevorkian H.A. [Frequency analysis of piston rod elastic displacements in motion process of slider-crank mechanism without taking dissipative forces into account]. *Sb. tr. VI mezhdunar. konf. "Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy"* [Proc. VI Int. Conf. Actual Problems of Continuum Mechanics]. Dilizhan, 2019, pp. 111–114 (in Russ.).

[18] Gofron M., Shabana A.A. Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems. *Nonlinear Dyn.*, 1993, vol. 4, iss. 2, pp. 183–206.

DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00045253>

Gevorkian H.A. — Cand. Sc. (Eng.), Research Fellow, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (Marshala Baghramyana prospekt 24, Yerevan, 0019 Republic of Armenia).

Please cite this article in English as:

Gevorkian H.A. Simulation of elastic tree-like dynamic systems in presence of external holonomic constraints. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 2 (89), pp. 4–24 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-4-24>



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие автора

И.Ю. Савельевой, И.В. Станкевича

**«Математическое моделирование
процессов теплопроводности методом
конечных элементов»**

Приведены формулировки стационарных и нестационарных задач теплопроводности. Рассмотрены основные особенности построения численного решения этих задач в рамках конечно-элементной технологии.

Для студентов 3-го и 4-го курсов факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплины «Уравнения математической физики», «Методы вычислений», «Математическое моделирование», «Прикладные пакеты инженерного анализа», «Математические модели механики сплошной среды» и выполняющих соответствующие курсовые работы. Может быть полезно студентам старших курсов других факультетов, изучающим численные методы решения краевых и начально-краевых задач.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

+7 (499) 263-60-45

press@bmstu.ru

<http://baumanpress.ru>