

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОБЛАДАЮЩЕЙ АНИЗОТРОПИЕЙ СВОЙСТВ АКТИВНОЙ ТЕПЛОЗАЩИТОЙ

А.В. Аттетков

fn2@bmstu.ru

П.А. Власов

pvlx@mail.ru

И.К. Волков

fn12@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Сформулирована и решена задача об определении стационарного температурного поля системы, имитируемой разделительной стенкой двух различных сред. Одна из поверхностей стенки обладает термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи, с анизотропным покрытием, подверженным локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что искомое температурное поле представляет собой аддитивную композицию двух независимых составляющих, первая из которых зависит лишь от интенсивности теплового взаимодействия разделяемых сред с граничными поверхностями изучаемой системы, а вторая — от плотности мощности теплового потока, воздействующего на разделительную систему с нулевыми температурами разделяемых сред. С применением методов интегральных преобразований в аналитически замкнутом виде найдены решения соответствующих задач стационарной теплопроводности. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида

Ключевые слова

Изотропная разделительная стенка, среда, термоактивная прокладка, анизотропное покрытие, локальное тепловое воздействие, стационарное температурное поле, интегральные преобразования

Поступила 03.09.2019

Принята 03.10.2019

© Автор(ы), 2020

Введение. Решение многих практически важных задач зачастую связано с необходимостью разработки в кратчайшие сроки эффективных средств теплозащиты соответствующих конструкций [1–4], что вряд ли возможно без широкого привлечения методов математического моделирования процессов формирования температурных полей в сопряженных твердых телах [5–9]. При этом особую привлекательность для практического использования (параметрический анализ изучаемого процесса, постановка

и решение задач оптимизации и т. д.) имеют те немногочисленные результаты, которые удается получить в аналитически замкнутом виде. Следует также отметить, что при использовании аналитических методов решения задачи теплопереноса в сопряженных твердых телах элементы реальной конструкции чаще всего имитируют изотропным полупространством и изотропной пластиной [10–12].

В настоящее время все большее внимание уделяется разработке средств активной теплозащиты конструкций. Одно из наиболее перспективных направлений в этой области связано с использованием термоэлектрических эффектов [2, 13], реализуемых термоактивной прокладкой, обладающей теплозащитным покрытием. Термоактивная прокладка является средством управляемого воздействия на температурное поле объекта исследований, которое осуществляется, в частности, путем регулирования силы тока или использованием обратной связи [14–19].

Трудности, с преодолением которых приходится сталкиваться при проведении параметрического анализа температурных полей конструкций с активной системой теплозащиты, хорошо известны [14–19]. Они значительно усугубляются при использовании в качестве покрытия термоактивной прокладки современных композиционных материалов, обладающих высокой степенью анизотропии [7, 9, 12]. Исследования, проведенные по рассматриваемой проблеме с использованием аналитических методов, весьма немногочисленны [8, 20–24] и каждый новый результат в этой области имеет не только теоретическое, но и прикладное значение.

Цель работы — решение задачи нахождения в аналитически замкнутом виде стационарного температурного поля конструкции с активной системой теплозащиты, имитируемой разделительной стенкой двух различных сред, одна из поверхностей которой обладает термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи, с анизотропным покрытием, подверженным локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой.

Исходные допущения и математическая модель. Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели искомого стационарного температурного поля $T(x_1, x_2, x_3)$ объекта исследований в фиксированной прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ предполагалось следующее.

1. Объект исследований представляет собой конструкцию, состоящую из изотропной стенки

$$\Omega_{\text{ст}} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : ([x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2) \wedge (0 < x_2 < h_{\text{ст}})\},$$

термоактивной прокладки [14–24]

$$\Omega_{T,II} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : ([x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2) \wedge (-h_{T,II} < x_2 < 0)\}$$

и анизотропного покрытия

$$\Omega_{II} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : ([x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2) \wedge (-(h_{II} + h_{T,II}) < x_2 < -h_{T,II})\},$$

где h_{CT} , $h_{T,II}$, h_{II} — значения геометрических характеристик, являющиеся постоянными величинами.

2. Термоактивная прокладка является ортотропной и функционирует по принципу обратной связи [19, 25, 26], т. е. в системах анизотропное покрытие–термоактивная прокладка и термоактивная прокладка–изотропная стенка для искомого температурного поля $T(x_1, x_2, x_3)$ реализуются условия сопряжения

$$\begin{aligned} T(x_1, -h_{T,II} - 0, x_3) &= T(x_1, -h_{T,II} + 0, x_3), \\ \left[\lambda_{12}^{II} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{22}^{II} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{23}^{II} \frac{\partial T}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_2=-h_{T,II}-0} &= -\lambda_2^{T,II} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h_{T,II}+0} = \\ &= -q_{T,II}^{II} [T - T_0] \Big|_{x_2=-h_{T,II}+0}; \\ T(x_1, 0 - 0, x_3) &= T(x_1, 0 + 0, x_3), \\ \lambda_2^{T,II} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0-0} &= -\lambda^{CT} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0+0} = -q_{T,II}^{CT} [T - T_0] \Big|_{x_2=0+0}, \end{aligned}$$

где $\{\lambda_{ij}^{II}\}$, $\{\lambda_k^{T,II}\}$, λ^{CT} — компоненты тензоров теплопроводности анизотропного материала покрытия, ортотропного материала термоактивной прокладки при $\lambda_1^{T,II} = \lambda_3^{T,II}$ и изотропного материала стенки соответственно; $q_{T,II}^{II}$, $q_{T,II}^{CT}$ — определяющие параметры обратной связи термоактивной прокладки со стороны покрытия и стенки; $T_0 = \text{const}$ — начальная температура объекта исследований.

3. Обратная связь настроена по начальной температуре объекта исследований, которая отлична от температуры $T_c^{CT} = \text{const}$ и $T_c^{II} = \text{const}$, где T_c^{CT} — температура внешней среды со стороны стенки, т. е. при $x_2 > h_{CT}$, T_c^{II} — температура внешней среды со стороны анизотропного покрытия, т. е. при $x_2 < -(h_{II} + h_{T,II})$; при этом в общем случае $T_c^{CT} \neq T_c^{II}$.

4. Теплообмен в системах внешняя поверхность изотропной стенки–внешняя среда и внешняя поверхность анизотропного покрытия–внешняя среда реализуется по закону Ньютона [10–12] с коэффициентами теплоотдачи α_{CT} и α_{II} .

5. Внешняя поверхность анизотропного покрытия находится под воздействием не только внешней среды с температурой $T_c^{\text{п}} \neq T_0$, но и теплового потока с плотностью мощности $q(x_1, x_3)$, который воздействует на поверхность $x_2 = -(h_{\text{п}} + h_{\text{т.п}})$ по направлению ее внутренней нормали.

6. Функционал $q(x_1, x_3)$ интегрируется с квадратом в \mathbb{R}^2 по совокупности своих аргументов, т. е. $q(x_1, x_3) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ [27].

Далее для удобства используем обозначения:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T - T_0}{T_c^{\text{п}} - T_0}; \quad x = \frac{x_1}{l_*}; \quad y = \frac{x_2}{l_*}; \quad z = \frac{x_3}{l_*}; \quad H_1 = \frac{h_{\text{п}}}{l_*}; \\ H_2 &= \frac{h_{\text{т.п}}}{l_*}; \quad H_3 = \frac{h_{\text{ст}}}{l_*}; \quad \text{Bi}^{(1)} = \frac{\alpha_{\text{п}} l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \text{Bi}^{(3)} = \frac{\alpha_{\text{п}} l_*}{\lambda_{\text{ст}}}; \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^{\text{п}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \\ \mu &= \frac{\lambda_1^{\text{т.п}}}{\lambda_2^{\text{т.п}}} = \frac{\lambda_3^{\text{т.п}}}{\lambda_2^{\text{т.п}}}; \quad \mu_{\text{п}} = \frac{\lambda_2^{\text{т.п}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \mu_{\text{ст}} = \frac{\lambda^{\text{ст}}}{\lambda_2^{\text{т.п}}}; \quad Q = \frac{q l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}} (T_c^{\text{п}} - T_0)}; \quad Q_*^{\text{ст}} = \frac{q_{\text{т.п}}^{\text{ст}} l_*}{\lambda_2^{\text{т.п}}}; \\ Q_*^{\text{п}} &= \frac{q_{\text{т.п}}^{\text{п}} l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}}; \quad \Delta\theta_{13} = \frac{T_c^{\text{ст}} - T_0}{T_c^{\text{п}} - T_0}. \end{aligned}$$

Здесь l_* — используемая единица масштаба пространственных переменных. В этом случае, согласно приведенным выше исходным допущениям, функционал $\theta(x, y, z)$, определяющий искомое стационарное температурное поле объекта исследований, должен удовлетворять системе трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа [10–12, 27]:

$$\begin{aligned} \mu_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + 2\mu_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \\ + \mu_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad [x, z]^T \in \mathbb{R}^2, \quad -(H_1 + H_2) < y < -H_2; \\ \mu \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad [x, z]^T \in \mathbb{R}^2, \quad -H_2 < y < 0; \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad [x, z]^T \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < y < H_3, \end{aligned} \quad (1)$$

неоднородным краевым условиям [10–12, 27]

$$-\left[\mu_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} = \text{Bi}^{(1)} [1 - \theta] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} + Q(x, z); \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=H_3} = \text{Bi}^{(3)} [\Delta\theta_{13} - \theta] \Big|_{y=H_3} \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} \theta(x, -H_2 - 0, z) &= \theta(x, -H_2 + 0, z); \\ \left[\mu_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \Big|_{y=-H_2-0} &= \left[\mu_{11} \frac{\partial \theta}{\partial y} - Q_*^n \theta \right] \Big|_{y=-H_2+0}; \\ \theta(x, 0 - 0, z) &= \theta(x, 0 + 0, z); \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0-0} &= \left[\mu_{ct} \frac{\partial \theta}{\partial y} - Q_*^{ct} \theta \right] \Big|_{y=0+0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Температурное поле. Результаты анализа исходной информации, представленной в виде незамкнутой математической модели (1)–(4), в сочетании с исходными допущениями позволяют выдвинуть следующую гипотезу: искомое стационарное поле объекта исследований имеет аддитивную структуру с двумя независимыми составляющими. Первая из этих составляющих определяет стационарное температурное поле объекта исследований, сформированное исключительно в результате его теплообмена с разделенными средами, а вторая — стационарное температурное поле объекта исследований, сформированное под воздействием внешнего теплового потока и охлаждения разделенными средами с нулевой температурой.

Принятие этой гипотезы приводит к равенству

$$\theta(x, y, z) = \theta_1(y) + \theta_2(x, y, z), \quad (5)$$

где функционал $\theta_1(y)$ должен удовлетворять краевой задаче (1)–(4) при нулевой плотности мощности теплового потока, т. е. при $Q(x, z) \equiv 0$. Используя стандартные методы [28], находим

$$\begin{aligned} \theta_1(y) &= (y - H_3) C_1(s) + s, \quad 0 \leq y \leq H_3, \quad C_1(s) = \text{Bi}^{(3)} (\Delta\theta_{13} - s); \\ \theta_1(y) &= y C_2(s) + C_3(s), \quad -H_2 \leq y \leq 0, \\ C_2(s) &= \delta_{21} - s \delta_{22}, \quad \delta_{21} = (\mu_{ct} + H_3 Q_*^{ct}) \text{Bi}^{(3)} \Delta\theta_{13}, \\ \delta_{22} &= (\mu_{ct} + H_3 Q_*^{ct}) \text{Bi}^{(3)} + Q_*^{ct}, \\ C_3(s) &= -\delta_{31} + s \delta_{32}, \quad \delta_{31} = \text{Bi}^{(3)} H_3 \Delta\theta_{13}, \quad \delta_{32} = 1 + \text{Bi}^{(3)} H_3; \\ \theta_1(y) &= (y + H_2) C_4(s) + C_5(s), \quad -(H_1 + H_2) \leq y \leq -H_2, \\ C_4(s) &= \delta_{41} - s \delta_{42}, \quad \delta_{41} = (\mu_{11} + H_2 Q_*^n) \delta_{21} + Q_*^n \delta_{31}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta_{42} &= (\mu_{11} + H_2 Q_*^{\Pi}) \delta_{22} + Q_*^{\Pi} \delta_{32}, \\ C_5(s) &= -\delta_{51} + s \delta_{52}, \delta_{51} = \delta_{31} + H_2 \delta_{21}, \delta_{52} = \delta_{32} + H_2 \delta_{22}; \\ s &= \left[(1 + H_1 \text{Bi}^{(1)}) \delta_{42} + \text{Bi}^{(1)} \delta_{52} \right]^{-1} \left[(1 + \delta_{51}) \text{Bi}^{(1)} + (1 + H_1 \text{Bi}^{(1)}) \delta_{41} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно равенству (5) и требованиям, предъявляемым к функционалу $\theta_1(y)$, функционал $\theta_2(x, y, z)$, определяющий вторую независимую аддитивную составляющую искомого температурного поля объекта исследований, должен удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа (1), условиям сопряжения (4), модифицированным краевым условиям (2), (3):

$$\begin{aligned} - \left[\mu_{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \text{Bi}^{(1)} \theta_2 \right] \Big|_{y=-(H_1+H_2)} &= Q(x, z); \\ \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \text{Bi}^{(3)} \theta_2 \right] \Big|_{y=H_3} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $Q(x, z) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, и требованиям принадлежности классу функций, интегрируемых с квадратом [27]:

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y, z) \Big|_{y \in [-(H_1+H_2), H_3]} &\in L^2(\mathbb{R}^2); \\ \theta_2(x, y, z) \Big|_{[x,z]^T \in \mathbb{R}^2} &\in L^2[-(H_1+H_2), H_3]. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно исходным допущениям, представленным в виде математической модели (1), (4), (7) и (8), функционал $\theta_2(x, y, z)$ как скалярная функция пространственных переменных x и z является оригиналом двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [29], задаваемого парой линейных операторов

$$\begin{aligned} \Phi[\bullet] &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bullet \exp(-ipx - irz) dx dz; \\ \Phi^{-1}[\bullet] &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bullet \exp(ipx + irz) dp dr, \end{aligned} \quad (9)$$

где i — мнимая единица [29]. Полагая, что

$$A(p, y, r) \triangleq \Phi[\theta_2(x, y, z)]; \quad \Pi(p, r) \triangleq \Phi[Q(x, z)], \quad (10)$$

используем стандартные свойства [29] двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (9) и в пространстве изображений представим исходную математическую модель (1), (4), (7), (8) в виде краевой задачи для системы трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 A}{dy^2} + 2i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) \frac{dA}{dy} - (\mu_{11}p^2 + 2\mu_{13}pr + r^2) A = 0; \\
 & \quad -(H_1 + H_2) < y < -H_2; \\
 & \frac{d^2 A}{dy^2} - \mu(p^2 + r^2) A = 0, \quad -H_2 < y < 0; \\
 & \frac{d^2 A}{dy^2} - (p^2 + r^2) A = 0, \quad 0 < y < H_3; \\
 & \left[\frac{dA}{dy} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) A - \text{Bi}^{(1)} A \right]_{y=-(H_1+H_2)} = -\Pi(p, r); \\
 & \quad A(p, -H_2 - 0, r) = A(p, -H_2 + 0, r); \\
 & \left[\frac{dA}{dy} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) A \right]_{y=-H_2-0} = \left[\mu_{\Pi} \frac{dA}{dy} - Q_{\Pi}^* A \right]_{y=-H_2+0}; \\
 & \quad A(p, 0 - 0, r) = A(p, 0 + 0, r); \\
 & \left. \frac{dA}{dy} \right|_{y=0-0} = \left[\mu_{\text{CT}} \frac{dA}{dy} - Q_{\text{CT}}^* A \right]_{y=0+0}; \\
 & \left[\frac{dA}{dy} + \text{Bi}^{(3)} A \right]_{y=H_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Решение (11) может быть найдено стандартными методами [28] и представлено в виде

$$\begin{aligned}
 & A(p, y, r) = G(p, y, r) \Pi(p, r); \\
 & G(p, y, r)|_{0 \leq y \leq H_3} = \left\{ \text{ch} \left[(y - H_3) \sqrt{p^2 + r^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \text{Bi}^{(3)} \text{sh} \left[(y - H_3) \sqrt{p^2 + r^2} \right] \right\} C_0(p, r) \exp \left[-i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) H_1 \right]; \\
 & G(p, y, r)|_{-H_2 \leq y \leq 0} = \left\{ \gamma_3(p, r) \text{ch} \left[y \sqrt{\mu(p^2 + r^2)} \right] - \right. \\
 & \left. - \gamma_4(p, r) \text{sh} \left[y \sqrt{\mu(p^2 + r^2)} \right] \right\} \times \\
 & \quad \times C_0(p, r) \exp \left[-i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) H_1 \right];
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & G(p, y, r) \Big|_{-(H_1+H_2) \leq y \leq -H_2} = \\
 & = \left\{ \gamma_5(p, r) \operatorname{ch} \left[(y + H_2) \sqrt{\delta(p, r)} \right] + \gamma_6(p, r) \operatorname{sh} \left[(y + H_2) \sqrt{\delta(p, r)} \right] \right\} \times \\
 & \quad \times C_0(p, r) \exp \left[-i\mu_{12} (y + H_1 + H_2) p - i\mu_{23} (y + H_1 + H_2) r \right]; \\
 & \quad \gamma_3(p, r) = \operatorname{ch} \left[H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right] + \operatorname{Bi}^{(3)} \operatorname{sh} \left[H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right]; \\
 & \quad \gamma_4(p, r) = \left\{ \mu_{\text{CT}} \sqrt{p^2 + r^2} \left[\operatorname{sh} \left(H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right) + \operatorname{Bi}^{(3)} \operatorname{ch} \left(H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + Q_{\text{CT}}^* \left[\operatorname{ch} \left(H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right) + \operatorname{Bi}^{(3)} \operatorname{sh} \left(H_3 \sqrt{p^2 + r^2} \right) \right] \right\} \left[\mu (p^2 + r^2) \right]^{-1/2}; \\
 & \quad \gamma_5(p, r) = \gamma_3(p, r) \operatorname{ch} \left[H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right] + \gamma_4(p, r) \operatorname{sh} \left[H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right]; \\
 & \quad \gamma_6(p, r) = \left\{ \mu_{\text{П}} \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \left[\gamma_3(p, r) \operatorname{sh} \left(H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \gamma_4(p, r) \operatorname{ch} \left(H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + Q_{\text{П}}^* \left[\gamma_3(p, r) \operatorname{ch} \left(H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right) + \gamma_4(p, r) \operatorname{sh} \left(H_2 \sqrt{\mu (p^2 + r^2)} \right) \right] \right\} \delta^{-1/2}(p, r); \\
 & \quad C_0(p, r) = \left\{ \gamma_5(p, r) \operatorname{sh} \left[H_1 \sqrt{\delta(p, r)} \right] + \operatorname{Bi}^{(1)} \operatorname{ch} \left[H_1 \sqrt{\delta(p, r)} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_6(p, r) \operatorname{ch} \left[H_1 \sqrt{\delta(p, r)} \right] + \operatorname{Bi}^{(1)} \operatorname{sh} \left[H_1 \sqrt{\delta(p, r)} \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь квадратичная форма

$$\delta(p, r) = (\mu_{11} - \mu_{12}^2) p^2 - 2(\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}) pr + (\mu_{33} - \mu_{32}^2) r^2 \tag{13}$$

является положительно определенной, что проверяется непосредственно с использованием критерия Сильвестра [30] и свойств тензора теплопроводности второго ранга [12].

Для завершения процедуры идентификации второй аддитивной составляющей искомого стационарного температурного поля объекта исследований, представленной функционалом $\theta_2(x, y, z)$, для изображения $A(p, y, r)$, определенного равенствами (12) и (13), необходимо реализовать переход из пространства изображений преобразования (9) в пространство его оригиналов. Этот переход может быть осуществлен различными способами в зависимости от поставленных целей.

В частности, если необходимо исследовать зависимость специфических особенностей искомого стационарного температурного поля объекта исследований от структуры плотности мощности $Q(x, z)$ воздействующего теплового потока, то целесообразно сначала воспользоваться теоремой о свертках и теоремой смещения [29] использованного интегрального преобразования Фурье (9). В этом случае, согласно (9), (10) и (12), имеем

$$\begin{aligned}
 & \theta_2(x, y, z) \Big|_{-(H_1+H_2) \leq y \leq -H_2} = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - \mu_{12}(y + H_1 + H_2) - x', z - \mu_{23}(y + H_1 + H_2) - z') \times \\
 & \quad \times g_{\Pi}(x', y, z') dx' dz', \\
 & g_{\Pi}(x, y, z) = \Phi^{-1} \left[G(p, y, r) \Big|_{-(H_1+H_2) \leq y \leq -H_2} \right]; \quad (14) \\
 & \theta_2(x, y, z) \Big|_{-H_2 \leq y \leq -H_3} = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - \mu_{12}H_1 - x', z - \mu_{23}H_1 - z') g_{\Gamma, \Pi}^c(x', y, z') dx' dz', \\
 & g_{\Gamma, \Pi}^c(x, y, z) = \Phi^{-1} \left[G(p, y, r) \Big|_{-H_2 \leq y \leq -H_3} \right].
 \end{aligned}$$

Кроме того, в рассматриваемом случае целесообразно в двойном не-
 собственном интеграле, реализующем оператор $\Phi^{-1}[\bullet]$, выполнить за-
 мену переменных с матрицей линейного оператора. Этот оператор в со-
 ответствии с известной теоремой [30] одновременно приводит к диаго-
 нальному виду две положительно определенные квадратичные формы
 $p^2 + r^2$ и $\delta(p, r)$. Затем следует использовать существующую связь между
 двумерным экспоненциальным преобразованием Фурье (9) и двумерным
 косинус-преобразованием Фурье [29].

Результаты и их обсуждение. Искомое стационарное температурное
 поле объекта исследований имеет аддитивную структуру с двумя незави-
 симыми составляющими, представленными функционалами $\theta_1(y)$ и
 $\theta_2(x, y, z)$. Первая составляющая определяет стационарное температур-
 ное поле объекта исследований, сформированное в результате его взаи-
 модействия с разделенными средами, а вторая — стационарное темпера-
 турное поле объекта исследований, сформированное под воздействием
 внешнего теплового потока и охлаждения разделенными средами с нуле-
 вой температурой, соответствующей температуре настройки обратной
 связи термоактивной прокладки.

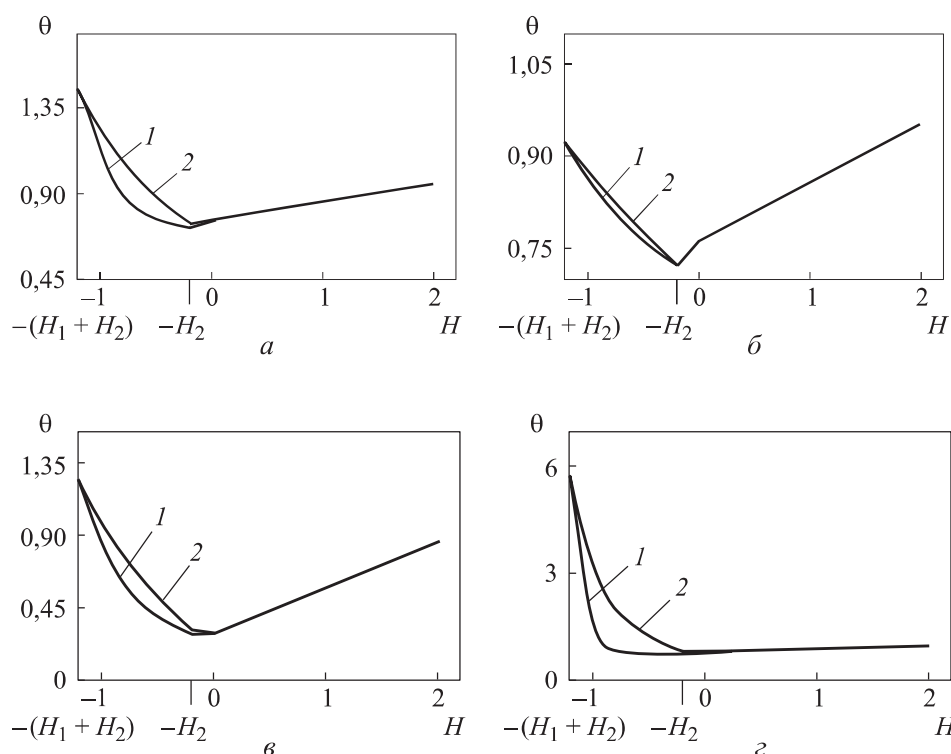
Функционалы $\theta_1(y)$ и $\theta_2(x, y, z)$ полностью идентифицированы и
 представлены равенствами (6) и (12)–(14) соответственно.

Согласно (14), в анизотропном материале покрытия термоактивной
 прокладки реализуется известный эффект «сноса» температурного поля
 [9, 21, 22]. В частности, если внешний тепловой поток обладает плотностью
 мощности гауссова типа с осью симметрии, совпадающей с осью Oy ,

то наиболее нагретой точкой теплозащитного покрытия является точка $(0, -(H_1 + H_2), 0)$ и «траектория ее дрейфа» по нормали к внутренней поверхности разделительной системы определяется равенствами

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (\mu_{12}(H_1 + H_2 + y), y, \mu_{23}(H_1 + H_2 + y)), \\ y &\in [-(H_1 + H_2), -H_2]; \\ (x, y, z) &= (\mu_{12}H_1, y, \mu_{23}H_1), y \in (-H_2, H_3]. \end{aligned} \quad (15)$$

Функционирование термоактивной прокладки разделительной системы по принципу обратной связи может оказывать существенное влияние на процесс формирования температурного поля объекта исследований. Это подтверждается результатами вычислительных экспериментов, частично приведенными на рисунке, и предполагает необходимость проведения дополнительного более детального анализа зависимости искомого стационарного поля как от определяющих параметров обратной связи, так и от основных характеристик внешнего теплового потока.



Стационарная температура объекта исследований вдоль оси Oy (1) и вдоль «траектории» наиболее нагретой точки, представленной равенствами (15) (2) при $Q_0 = 1, Q_{ct}^* = 1, K = 1$ (а), $Q_0 = 0,1, Q_{ct}^* = 1, K = 1$ (б), $Q_0 = 1, Q_{ct}^* = 10, K = 1$ (в) и $Q_0 = 1, Q_{ct}^* = 1, K = 10$ (г)

Заключение. Представленные результаты иллюстрируют воздействие на объект исследований стационарного осесимметричного теплового потока интенсивностью

$$Q(x, z) = Q_0 \left(K^2 / \pi \right) \exp \left[-K^2 (x^2 + z^2) \right]$$

гауссова типа в условиях теплообмена с внешней средой. Расчет выполнен при $H_1 = 1$, $H_2 = 0, 2$, $H_3 = 2$, $\Delta\theta_{13} = 1$, $Bi^{(1)} = 1$, $Bi^{(3)} = 2$, $Q_*^H = 1$, $\mu = 5$, $\mu_{11} = 5$, $\mu_{12} = 2$, $\mu_{13} = 4$, $\mu_{22} = 2$, $\mu_{23} = 2$, $\mu_{33} = 5$ и различных значениях параметров Q , $Q_*^{ст}$, K .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М., Энергия, 1976.
- [2] Зарубин В.С. Расчет и оптимизация теплоизоляции. М., Энергоатомиздат, 1991.
- [3] Полежаев Ю.В., Шишков А.А. Газодинамические испытания тепловой защиты. М., Промедэк, 1992.
- [4] Галицейский Б.М., ред. Тепловая защита лопаток турбин. М., Изд-во МАИ, 1996.
- [5] Зинченко В.И. Математическое моделирование сопряженных задач теплообмена. Томск, Изд-во ТГУ, 1985.
- [6] Гришин А.М., Голованов А.Н., Зинченко В.И. и др. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты. Томск, Изд-во ТГУ, 2011.
- [7] Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М., МАИ-Принт, 2010.
- [8] Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М., ФИЗМАТЛИТ, 2015.
- [9] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М., Изд-во МАИ, 2016.
- [10] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., Высш. шк., 1967.
- [11] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М., Высш. шк., 2001.
- [12] Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М., ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- [13] Анатычук Л.И. Термоэлементы и термоэлектрические устройства. Киев, Наукова думка, 1979.
- [14] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции. *Известия РАН. Энергетика*, 2002, № 4, с. 131–141.
- [15] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Базовая модель процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой. *Известия РАН. Энергетика*, 2009, № 2, с. 147–155.

- [16] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии. *Инженерно-физический журнал*, 2008, т. 81, № 3, с. 559–568.
- [17] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Температурное поле экранированной стенки с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии. *Инженерно-физический журнал*, 2009, т. 82, № 5, с. 935–943.
- [18] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями. *Известия РАН. Энергетика*, 2010, № 3, с. 83–91.
- [19] Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина экранированной стенки с термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, № 5.
DOI: <http://dx.doi.org/10.7463/0512.0396333>
- [20] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Иерархия математических моделей процесса формирования температурного поля в системе «изотропная пластина–термоактивная прокладка–анизотропное покрытие». *Тепловые процессы в технике*, 2013, т. 5, № 5, с. 224–228.
- [21] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Стационарное температурное поле охлаждаемой ортотропной пластины с термически тонкой термоактивной прокладкой и анизотропным покрытием, находящейся под воздействием внешнего теплового потока. *Известия РАН. Энергетика*, 2013, № 5, с. 136–145.
- [22] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле конструкции с активной системой теплозащиты, содержащей анизотропное покрытие. *Известия РАН. Энергетика*, 2013, № 6, с. 125–136.
- [23] Аттетков А.В., Волков И.К. Установившееся температурное поле системы с активной теплозащитой. *Тепловые процессы в технике*, 2014, т. 6, № 2, с. 81–86.
- [24] Аттетков А.В., Волков И.К. Особенности процесса формирования температурного поля в системе с активной теплозащитой. *Известия РАН. Энергетика*, 2014, № 3, с. 69–81.
- [25] Негойцэ К. Применение теории систем к процессам управления. М., Мир, 1981.
- [26] Дезоер Ч., Видьясагар М. Системы с обратной связью, вход-выходные соотношения. М., Наука, 1983.
- [27] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высш. шк., 1970.
- [28] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1969.
- [29] Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во ИЛ, 1955.
- [30] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., Наука, 1969.

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Власов Павел Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Стационарное температурное поле разделительной системы с обладающей анизотропией свойств теплозащитой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 3 (90), с. 4–19. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-3-4-19>

**STEADY-STATE TEMPERATURE FIELD IN A SEPARATOR SYSTEM
FEATURING ACTIVE THERMAL PROTECTION
WITH ANISOTROPIC PROPERTIES**

A.V. Attetkov

fn2@bmstu.ru

P.A. Vlasov

pvlx@mail.ru

I.K. Volkov

fn12@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We stated and solved the problem of determining the steady-state temperature field of a system simulated by a wall separating two different media. One of the wall surfaces has a thermally active layer that functions according to the feedback principle and features an anisotropic coating subjected to local heating while undergoing heat exchange with the environment. We show that the sought-after temperature field is an additive composition of two independent components, the first of which is exclusively a function of the heat exchange intensity between the separated media and the boundary surfaces of the system under consideration, and the second is a function of the heat flow power density affecting the separator system for the temperatures of the media separated being zero.

Keywords

Isotropic separator wall, medium, thermally active layer, anisotropic coating, local heating, steady-state temperature field, integral transforms

We used integral transform methods in an analytical-ly closed form to find solutions to respective steady-state heat conductivity problems. The results obtained confirm the existence of a previously found temperature field “drift” effect in an anisotropic material displaying general anisotropy of its properties

Received 03.09.2019

Accepted 03.10.2019

© Author(s), 2020

REFERENCES

- [1] Polezhaev Yu.V., Yurevich F.B. *Teplovaya zashchita* [Heat protection]. Moscow, Energiya Publ., 1976.
- [2] Zarubin V.S. *Raschet i optimizatsiya teploizolyatsii* [Calculation and optimization of heat isolation]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991.
- [3] Polezhaev Yu.V., Shishkov A.A. *Gazodinamicheskie ispytaniya teplovoy zashchity* [Gas-dynamic tests of heat protection]. Moscow, Promedek Publ., 1992.
- [4] Galitseyskiy B.M., ed. *Teplovaya zashchita lopatok turbin* [Heat protection of turbine blades]. Moscow, MAI Publ., 1996.
- [5] Zinchenko V.I. *Matematicheskoe modelirovanie sopryazhennykh zadach teplobmena* [Mathematical simulation of heat exchange adjoint problems]. Tomsk, TGU Publ., 1985.
- [6] Grishin A.M., Golovanov A.N., Zinchenko V.I., et al. *Matematicheskoe i fizicheskoe modelirovanie teplovoy zashchity* [Mathematical and physical simulation of heat protection]. Tomsk, TGU Publ., 2011.
- [7] Formalev V.F., Kuznetsova E.L. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and mass transfer in anisotropic bodies during aerogasdynamics heating]. Moscow, MAI-Print Publ., 2010.
- [8] Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennyye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, reverse problems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2015.
- [9] Formalev V.F., Kolesnik S.A. *Matematicheskoe modelirovanie aerogazodinamicheskogo nagreva zatuplennykh anizotropnykh tel* [Mathematical simulation of gas-dynamic heating of blunt anisotropic objects]. Moscow, MAI Publ., 2016.
- [10] Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967.
- [11] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in heat conduction theory of solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001.
- [12] Formalev V.F. *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Heat conduction of anisotropic bodies. Analytical methods for problems solving]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2014.
- [13] Anatyshuk L.I. *Termoelementy i termoelektricheskie ustroystva* [Thermal elements and thermoelectric devices]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1979.

- [14] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Thermosetting pad as a means of controlled influence on the temperature field construction. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2002, no. 4, pp. 131–141 (in Russ.).
- [15] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Baseline model of heat transfer in screened half-space with a thermosetting layer. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2009, no. 2, pp. 147–155 (in Russ.).
- [16] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Mathematical modeling of the process of heat transfer in a shielded half-space with a thermoactive spacer under external thermal action. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2008, vol. 81, iss. 3, pp. 588–597.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-008-0070-z>
- [17] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Temperature field of a screened wall with a thermoactive lining on exposure to an axisymmetric thermal effect. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2009, vol. 82, no. 5, art. no. 940.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0276-8>
- [18] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Temperature field in the multi-layer halfspace under non-ideal thermal contact between layers. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2010, no. 3, pp. 83–91 (in Russ.).
- [19] Volkov I.K., Tverskaya E.S. Optimum thickness of screened wall with a feedback heat-activated padding. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication], 2012, no. 5 (in Russ.).
DOI: <http://dx.doi.org/10.7463/0512.0396333>
- [20] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Mathematical models hierarchy of thermal field forming process in system “isotropic plate–thermal active pad–anisotropic coating”. *Teplovye protsessy v tekhnike*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 224–228 (in Russ.).
- [21] Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. Stationary temperature field of a cooled orthotropic wall with a thermal active layer and anisotropic coating, under the influence of external heat flux. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2013, no. 5, pp. 136–145 (in Russ.).
- [22] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of construction with active heat protection with anisotropic coating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2013, no. 6, pp. 125–136 (in Russ.).
- [23] Attetkov A.V., Volkov I.K. Ready-state temperature field of a system with active heat protection. *Teplovye protsessy v tekhnike*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 81–86 (in Russ.).
- [24] Attetkov A.V., Volkov I.K. Peculiarities of formation of the temperature field in a system with an active heat shield. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2014, no. 3, pp. 69–81 (in Russ.).
- [25] Negoită C.V. Management applications of system theory. Bazel and Stuttgart, 1979.
- [26] Desoer C.A., Vidyasagar M. Feedback system: input–output properties. Academic Press, 1975.

[27] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uraveniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970.

[28] El'sgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and variational calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1969.

[29] Sneddon I. *Fourier transforms*. New York, Dover Publ., Inc., 1951.

[30] Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. McGraw-Hill, 1970.

Attetkov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Vlasov P.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Volkov I.K. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Steady-state temperature field in a separator system featuring active thermal protection with anisotropic properties. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 3 (90), pp. 4–19 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-3-4-19>