

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЕГМЕНТА РЕЛЬСОВОЙ ПЛЕТИ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**Е.А. Гридасова¹

olvin@list.ru

А.А. Локтев²

aaloktev@yandex.ru

Л.А. Илларионова²

illarionova.roat@mail.ru

¹ ДВФУ, Владивосток, Российская Федерация² РУТ (МИИТ), Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Предложена математическая модель динамического поведения сегмента рельсовой плети в пределах нескольких шпал. Модель позволяет учесть предварительные напряжения, возникающие при закреплении рельса в плети, анизотропные свойства рельсошпальной решетки, воздействия от подвижного состава при различных начальных условиях приложения нагрузки. Рассмотрены 11 функциональных зависимостей, описывающих контакт колеса и рельса. С использованием этих зависимостей можно выбрать модель для наиболее точного описания воздействия экипажей на участки железнодорожного пути, которые могут отличаться конструктивными особенностями, механическими характеристиками используемых материалов, режимами эксплуатации, наличием дефектов на поверхности катания рельсов и колесных пар. Волновые уравнения, используемые для описания поведения сегмента рельсовой плети, позволяют моделировать процесс распространения упругих волн после начала контакта с колесной парой. Это существенно при высоких скоростях транспортных средств. В результате проведенных исследований построены графические зависимости силы взаимодействия между колесом и рельсом для разных моделей контакта. Указанные зависимости позволяют выбрать оптимальное соотношение сил с учетом геометрических, механических и конструктивных параметров участка железнодорожного пути, режимов эксплуатации и искомых функций, которых необходимо достичь: максимум контактной силы, продолжительность контакта, время нагружения и разгрузки

Ключевые слова

Математическая модель, динамический контакт, колесо, рельс, волновое уравнение, искомая функция, интегродифференциальное уравнение, итерационная вычислительная схема

Поступила 22.11.2019

Принята 18.02.2020

© Автор(ы), 2020

Введение. В рельсовом хозяйстве в процессе работы рельса по мере наработки пропущенного тоннажа происходит его износ, смятие, образование коррозии и дефектов. Это может привести к частичному отказу рельса и ограничению скорости движения поездов, или к отказу рельсовой нити, вызванного острым дефектом, при котором невозможен пропуск поездов. Практика текущего содержания железнодорожного пути показывает, что наиболее часто рельсы требуют замены вследствие дефектов контактно-усталостного происхождения [1, 2], таких как выкрашивания металла на рабочей грани и поверхности катания рельса; множественные трещины на рабочей грани головки рельса; внешние и внутренние продольно направленные микротрещины контактной усталости и развивающиеся от них поперечно направленные усталостные трещины [3, 4].

Для создания адекватной модели динамического поведения и работы сегмента рельса (рис. 1) в реальных условиях перечислим факторы, наиболее влияющие на боковой износ сегмента рельса и его интенсивность [5–9]:

- радиус кривой участка железнодорожного пути;
- изменение вертикальной и горизонтальной жесткости пути за счет использования железобетонных шпал;
- изменения эпюры шпал и типов их креплений;
- наличие водопропускных труб, участков переменной жесткости и т. д.;
- использование в конструкции транспортных средств буксовых роликовых подшипников вместо подшипников скольжения (это увеличивает сопротивления повороту тележек подвижного состава в кривых и устраняет побочное смазывание рельса маслосодержащими веществами, выдавливаемыми из манжет подшипников скольжения, увеличивая силу трения между трибопарами);
- увеличение нагрузок на ось колесной пары;
- развитие тяжеловесного движения;
- увеличение общего веса поезда за счет увеличенной длины;
- уменьшение интервала между поездами;
- увеличение твердости колес тягового подвижного состава при современных способах упрочнения бандажей (550 НВ и более) по отношению к твердости головки рельсов (350 НВ) при наличии шероховатости поверхности бандажа.

Модели динамического контакта колеса и рельса. Взаимодействие колеса и рельса в заданном месте рельсовой плети характеризуется появлением в рельсе контактной области радиусом r_0 . От границы этой области

начинают распространяться квазипродольная волна, на фронте которой преобладают деформации растяжения–сжатия, и квазипоперечная, на фронте которой основными являются деформации сдвига [10, 11].



Рис. 1. Фрагмент рельсовой плети на железобетонных шпалах

Фронты упругих волн на первых этапах взаимодействия колеса и рельса являются цилиндрическими поверхностями, образующие которых перпендикулярны недеформированной срединной поверхности, а расположенные в срединной плоскости направляющие представляют собой расширяющиеся с нормальными постоянными скоростями $G^{(\alpha)}$ (α — номер волны, $\alpha = 1$ квазипродольная, $\alpha = 2$ квазипоперечная) окружности (рис. 2).

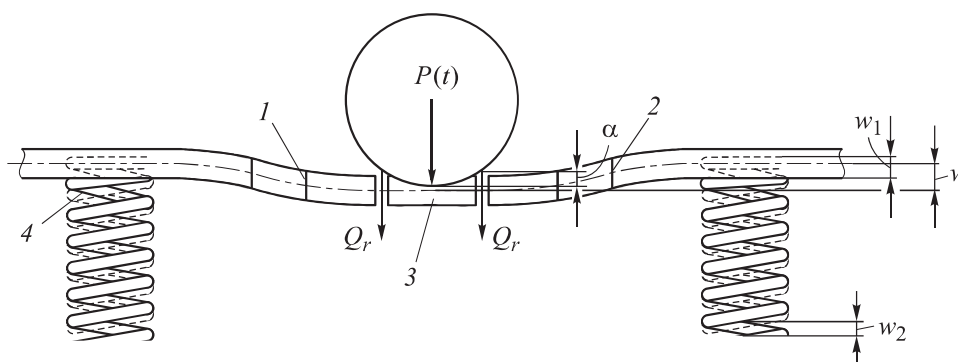


Рис. 2. Схемы взаимодействия колеса и верхнего строения пути [12, 13]:

$P(t)$ — сила взаимодействия между колесом и рельсом; Q_r — поперечная сила, действующая по контуру контактной области; α — местное смятие материалов колеса и рельса в зоне контакта; w — прогиб рельсовой плети между двумя соседними шпалами; w_1, w_2 — перемещения нижних граней рельса и шпалы; 1, 2 — фронты квазипоперечной и квазипродольной волн; 3 — контактная область взаимодействия колеса и рельса; 4 — модель взаимодействия рельса–шпалы–балласта

Для определения внешней нагрузки, передаваемой от подвижного состава на рельсовую плеть и необходимой для вычисления напряжений в заданных точках рельса, требуется рассмотреть контактную задачу и определить зависимость между силой взаимодействия $P(t)$ колеса и рельса, механическими свойствами материалов и геометрическими параметрами конструкции верхнего строения железнодорожного пути [3, 4, 14]. Поскольку динамические и кинематические параметры воздействия транспортных средств на железнодорожный путь, конструкционные особенности пути и механические характеристики используемых материалов для разных участков железной дороги и режимов эксплуатации варьируются в широком диапазоне значений, здесь предложено рассмотреть несколько функциональных выражений для силы динамического контакта. В качестве критерия для их классификации будем использовать определяющие соотношения, показывающие связь параметров воздействия, конструкции и силы взаимодействия на разных этапах нагружения, и выделять зависимости с одним функциональным соотношением и с несколькими [11–18].

В первую группу к определяющим зависимостям для контактной силы с одним функциональным выражением, описывающим контакт колеса и рельса в разные моменты времени, можно отнести контактную модель Герца, линейно-упругую модель, вязкоупругую модель с экспоненциальным ядром релаксации [10–12]:

$$P = k\alpha^{3/2}; \quad (1a)$$

$$P = E_1 (\alpha - w_1); \quad (1б)$$

$$P = E_1 (\alpha - w_1) - \frac{E_1}{\tau_1} \int_0^t (\dot{\alpha} - \dot{w}_1) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt'. \quad (1в)$$

Здесь k — параметр, определяющий геометрические и механические характеристики взаимодействующих тел; α — местное смятие материалов рельса и колеса; E_1 — усредненный модуль упругости области контакта колеса и рельса; $\tau_1 = \eta_1/E_1$ — время релаксации для вязкоупругого взаимодействия, η_1 — коэффициент вязкого сопротивления.

Во вторую группу аналитических зависимостей для контактной силы входят модели, функциональные соотношения которых содержат несколько выражений для разных этапов. Для этапов начала нагружения, выхода на максимум и разгрузки — упругопластические модели Кильчевского и Александрова — Кадомцева:

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0, P < P_b; \\ bP^{2/3} + Pd, & dP/dt > 0, P > P_b; \\ bP^{2/3} + P_{\max}d, & dP/dt < 0, P_{\max} > P_b, \end{cases} \quad (1г)$$

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0, P_{\max} < P_1; \\ (1+\beta)c_1 + (1-\beta)Pd, & dP/dt > 0, P_{\max} > P_1; \\ b_f P^{2/3} + \alpha_p(P_{\max}), & dP/dt < 0, P_{\max} > P_1. \end{cases} \quad (1д)$$

Модель с разгрузкой, где начало взаимодействия до выхода на пик силы описывается выражением (1а), а после — выражением (для этапа разгрузки)

$$P = P_{\max} \left[\frac{(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha_{\max} - \alpha_0)} \right]^q. \quad (1е)$$

Модель с совмещением ветвей нагружения и разгрузки, полученная за счет фактического использования условий совместности — модель Аброте

$$P = P_{\max} \left[\frac{(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha_{\max} - \alpha_0)} \right]^{3/2}. \quad (1ж)$$

Линеаризованная модель с изменяющимися механическими параметрами для разных этапов нагружения

$$P = k_1\alpha, \quad k_1 = P_{\max}^{1/3}k^{2/3}. \quad (1з)$$

Модель Шимасу

$$\alpha = \left(\frac{P}{k_H} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{\ln 2P^{1/3}k_H^{2/3}K_0}{h} \right), \quad k_H = \frac{4}{3}Q_H\sqrt{R}. \quad (1и)$$

Эмпирическая модель

$$P = kw_0^n. \quad (1к)$$

Отдельно рассмотрена трехфазная модель, полученная из условия совместности энергетических параметров разных этапов нагружения [12–19].

Первый этап трехфазовой энергетической модели характеризуется соотношением (1а), на втором этапе при $\alpha_{cr} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ выполняется равенство $P(\alpha) = K_y(\alpha - \alpha_{cr}) + k_H\alpha_{cr}^{3/2}$, на третьем —

$$P(\alpha) = K_y (\alpha_{\max} - \alpha_{cr}) + k_H \left(\alpha^{3/2} - \alpha_{\max}^{3/2} + \alpha_{cr}^{3/2} \right). \quad (1л)$$

Здесь параметр пластичности $\lambda = 5,7$;

$$\chi = \pi k_{pl} \lambda; \quad b = \left(\left(9\pi^2 (k_1 + k)^2 \right) / 16R \right)^{1/3}; \quad k_1 = (1 - \sigma_1^2) / E_1;$$

$$k = (1 - \sigma^2) / E; \quad R_p^{-1} = R^{-1} - R_f^{-1}; \quad P_1 = \chi^3 (3R(k_1 + k) / 4)^2;$$

$$b_f = R_f^{-1/3} (3(k_1 + k) / 4)^{2/3}; \quad c_1 = 3\chi^{1/2} (k_1 + k) / 8;$$

$$R_f = (4/3 (k_1 + k)) P_{\max}^{1/2} \chi^{-3/2}; \quad \alpha_p (P_{\max}) = (1 - \beta) P_{\max} (2\chi R_p)^{-1};$$

$$K_y = 1,5 k_H \sqrt{\alpha_{cr}}; \quad d = 1/2 \chi R;$$

k_{pl} — наименьшая из пластических констант; $\beta = 0,33$; величины, наиболее часто определяемые эмпирически: P_{\max} — максимальное значение контактной силы перед началом этапа разгрузки; α_{\max} — максимальное значение смятия материала в области взаимодействия; α_0 — текущее значение смятия; α_{cr} — предельное значение смятия; k_H — контактная жесткость, определяемая радиусом колеса R , эффективным контактным модулем Q_H и наличием дефектов на колесной паре (ползуны, навары, трещины и т. д.).

Функциональные соотношения для определения деформированного состояния сегмента рельса. Моделирование динамического поведения рельсовой плети в пределах двух смежных шпал под действием колесной пары подвижного состава предложено выполнять с помощью уравнений для ортотропного плоского элемента, предварительно-напряженного продольной силой и двумя моментами. Это в целом соответствует состоянию сегментов рельсовой плети, уложенной в путь с учетом закрепления, в зависимости от используемых промежуточных скреплений, наличия уравнивательных стыков, подуклонки в кривых участках пути [4, 6, 17]. Волновые уравнения для сегмента рельсовой плети учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения поперечных сечений, позволяют моделировать процесс распространения упругих волн после начала контакта с колесной парой, что особенно важно для высоких скоростей следования подвижного состава. В безразмерном виде такие соотношения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{c_2}{c_1} \varphi + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \\
 & + \frac{12c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + M + \frac{M_r \Delta_r u}{c_1 h \rho}; \\
 & \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + q_1 \sin \alpha_1 + \frac{N \Delta_r w}{c_1 h^2 \rho}; \\
 & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{u}{r^2} + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \\
 & = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{N \Delta_r u}{c_1 h^2 \rho} + \frac{M_r \Delta_r \varphi}{c_1 \rho}; \tag{2} \\
 & \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \\
 & = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \frac{M_z \Delta_\theta \psi}{c_1 \rho}; \\
 & \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) + \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \\
 & + \frac{12c_5}{c_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi \right) = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{M_z \Delta_\theta v}{c_1 h \rho}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$c_1 = \frac{E_r}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}; \quad c_2 = \frac{E_\theta}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}; \quad c_3 = \frac{G_{r\theta}}{\rho}; \quad c_4 = \frac{K G_{rz}}{\rho}; \quad c_5 = \frac{K G_{\theta z}}{\rho};$$

$$q_1 = \frac{q h}{\rho c_1}; \quad M = \frac{12 q R_1 \cos \alpha_1}{\rho h c_1} = \frac{12 R_1 \cos \alpha_1}{h^2} q_1,$$

R_1 — радиус колеса пары, q — приведенная нагрузка, α_1, α_2 — углы направления наибольшей силы в вертикальной и горизонтальной плоскостях, E_r, E_θ и σ_r, σ_θ — модули упругости и коэффициенты поперечных деформаций для направлений r, θ ; $G_{rz}, G_{\theta z}$ — модули сдвига в плоскостях, указанных в нижнем регистре; $w(r, \theta)$ — нормальное перемещение срединной плоскости; $u(r, \theta), v(r, \theta)$ — тангенциальные перемещения срединной поверхности по координатам r, θ ; $\varphi(r, \theta), \psi(r, \theta)$ — функции углов

поворота в направлениях r , θ ; $\tau = \frac{t\sqrt{c_1}}{h}$, $w = \frac{w'}{h}$, $u = \frac{u'}{h}$, $v = \frac{v'}{h}$, $r = \frac{r'}{h}$,

h — высота рельса; $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$; $\Delta_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$; N — внешняя про-

дольная сила, действующая вдоль рельсовой плети; M_r — внешний изгибающий момент, вектор которого направлен вдоль рельса; M_z — внешний крутящий момент, вектор которого направлен вдоль шпалы.

В (2) величины c_i ($i = 1, \dots, 5$) обозначают квадраты скоростей упругих волн при отсутствии предварительного нагружения сегмента рельса; цифры 1, 2 определяют квазипродольные волны растяжения–сжатия, скорости которых направлены вдоль направлений r и θ соответственно, цифра 3 — волну сдвига с преобладающими деформациями в плоскости $r\theta$, цифры 4, 5 — квазипоперечные волны, на фронтах которых преобладает сдвиг в плоскостях rz , θz соответственно.

Метод решения определяющих уравнений. Динамические (сила взаимодействия колеса и рельса, а также элементов верхнего строения пути между собой), кинематические (скорости линейных и угловых перемещений в различных направлениях), геометрические (линейные и угловые перемещения в различных направлениях) характеристики определяются из системы функциональных волновых уравнений (2), записанных в пространстве Лапласа [18, 20]. Для решения системы уравнений в пространстве изображений представим функцию внешней нагрузки $q(\tau, r, \theta)$, в которую входит сосредоточенная сила взаимодействия колеса и рельса $P(t)$, в виде разложения в ряд по сферическим функциям на основе полиномов Лежандра:

$$\tilde{q}_1 = \frac{P(p)}{\pi R_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta). \quad (3)$$

Неизвестные линейные и угловые перемещения также представим в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра:

$$\tilde{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{2n+m} P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta). \quad (4)$$

В (3) и (4) тильда над переменной показывает, что эта величина используется в пространстве Лапласа, переменная x принимает значения u , v , w , φ , ψ ; R — характерный линейный размер сегмента рельсовой плети; r_1 — координата точки, в которой происходит динамический контакт колеса и рельса, отсчитываемая вдоль плети.

Коэффициенты отрезков рядов (3), (4) определяются вблизи искомым точек сегмента рельсовой плети, в которых необходимо вычислить динамические и геометрические параметры деформирования [21, 22]. Для этого используется их представление в виде рядов Лорана при $\varepsilon = p^{-2}$:

$$x_{2n+m} = x_{2n+m}^0 \varepsilon^0 + x_{2n+m}^1 \varepsilon^1 + x_{2n+m}^2 \varepsilon^2 + x_{2n+m}^3 \varepsilon^3. \quad (5)$$

Подставляя отрезки рядов (3), (4), функциональные коэффициенты которых записаны в виде (5), в систему определяющих уравнений (2) и поочередно приравнивая множители при одинаковых степенях параметра ε , приходим к системам линейных алгебраических уравнений на каждом этапе, соответствующем одному значению показателя, из которых определим следующие величины:

$$w_{2n+m}^i = \frac{1}{\left[C_{w2} (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4}) + C_{\varphi2} (A_{w3} A_{\psi4} - A_{w4} A_{\psi3}) - C_{\psi2} (A_{w3} A_{\varphi4} - A_{w4} A_{\varphi3}) \right] \times} \times \left(\sin \alpha_1 P_s (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4}) - \cos \alpha_1 P_s [C_{\varphi2} (A_{P4} A_{\psi3} - A_{P3} A_{\psi4}) - C_{\psi2} (A_{P4} A_{\varphi3} - A_{P3} A_{\varphi4})] \right) + \left(\frac{C_{u4}}{C_{u1}} \varphi_{2n+m}^{i+1} + \frac{C_{v4}}{C_{v5}} \psi_{2n+m}^{i+1} \right) \left(\frac{C_{\psi2} A_{\varphi3} - C_{\varphi2} A_{\psi3}}{A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4}} \right) + \left(\frac{C_{u3}}{C_{u1}} \varphi_{2n+m}^{i+1} + \frac{C_{v3}}{C_{v5}} \psi_{2n+m}^{i+1} \right) \left(\frac{C_{\varphi2} A_{\psi4} - C_{\psi2} A_{\varphi4}}{A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4}} \right) + w^{i+1};$$

$$\varphi_{2n+m}^i = \frac{(A_{w3} A_{\psi4} - A_{w4} A_{\psi3}) w_{2n+m}^i + \cos \alpha_1 P_s (A_{P4} A_{\psi3} - A_{P3} A_{\psi4})}{(A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})} + \frac{\varphi_{2n+m}^i (A_{\psi3} C_{u4} - A_{\psi4} C_{u3})}{C_{u1} (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})} + \frac{\psi_{2n+m}^i (A_{\psi3} C_{v4} - A_{\psi4} C_{v3}) - v_{2n+m}^{i+1} - u_{2n+m}^{i+1} A_{\psi4}}{C_{v5} (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})};$$

$$\psi_{2n+m}^i = \frac{(A_{w4} A_{\varphi3} - A_{w3} A_{\varphi4}) w_{2n+m}^i - \cos \alpha_1 P_s (A_{P4} A_{\varphi3} - A_{P3} A_{\varphi4})}{(A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})} - \frac{\varphi_{2n+m}^i (A_{\varphi3} C_{u4} - A_{\varphi4} C_{u3})}{C_{u1} (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})} - \frac{\psi_{2n+m}^i (A_{\varphi3} C_{v4} - A_{\varphi4} C_{v3}) - v_{2n+m}^{i+1} - u_{2n+m}^{i+1} A_{\varphi4}}{C_{v5} (A_{\varphi4} A_{\psi3} - A_{\varphi3} A_{\psi4})};$$

$$v_{2n+m}^i = \frac{-\psi_{2n+m}^{i+1} - C_{\psi 5} \psi_{2n+m}^i - C_{\phi 5} \phi_{2n+m}^i - C_{w 5} w_{2n+m}^i}{C_{v 5}};$$

$$u_{2n+m}^i = \frac{\frac{12R_1}{h^2} \cos \alpha_1 P_s - \phi_{2n+m}^{i+1} - C_{\phi 1} \phi_{2n+m}^i - C_{\psi 1} \psi_{2n+m}^i - C_{w 1} w_{2n+m}^i}{C_{u 1}}. \quad (6)$$

Здесь

$$A_{\phi 3} = C_{\phi 3} - \frac{C_{\phi 1} C_{u 3}}{C_{u 1}} - \frac{C_{\phi 5} C_{v 3}}{C_{v 5}}; \quad A_{\psi 3} = -\frac{C_{\psi 1} C_{u 3}}{C_{u 1}} - \frac{C_{\psi 5} C_{v 3}}{C_{v 5}};$$

$$A_{w 3} = -\frac{C_{w 1} C_{u 3}}{C_{u 1}} - \frac{C_{w 5} C_{v 3}}{C_{v 5}};$$

$$A_{\phi 4} = -\frac{C_{\phi 5} C_{v 4}}{C_{v 5}} - \frac{C_{\phi 1} C_{u 4}}{C_{u 1}}; \quad A_{\psi 4} = C_{\psi 4} - \frac{C_{\psi 1} C_{u 4}}{C_{u 1}} - \frac{C_{\psi 5} C_{v 4}}{C_{v 5}};$$

$$A_{w 4} = -\frac{C_{w 1} C_{u 4}}{C_{u 1}} - \frac{C_{w 5} C_{v 4}}{C_{v 5}};$$

$$P_s = P(p) \frac{4n+3}{\pi R_c^2} P_{2n+1} \left(\cos \left(\frac{\pi r_1}{2R} \right) \right) P_{2n+1} \left(\cos \left(\frac{\pi r}{2R} \right) \right) \cos(m\theta), \quad i = 0, \dots, 3.$$

Соотношения для C_{xj} ($j = 1, \dots, 5$ — порядковый номер уравнения в системе (6)) предлагается вычислять как сумму множителей выбранного перемещения x в соответствующем уравнении системы.

Окончательное решение динамической задачи в описанной постановке достигается при представлении соотношений (6) для конкретного места контакта колеса и рельсовой плети и точки определения искомым кинематических и геометрических параметров деформирования, т. е. r и θ равны определенным значениям [15, 19, 21].

Результаты численного моделирования. После подстановки выражений для контактной силы (1а)–(1л) и выражений типа (6) для различных вертикальных перемещений рельсовых плетей при деформировании в соотношение (5) получим функциональное интегродифференциальное уравнение, которое предлагается решить численно [22–24]. Для определения интервала деления характерного времени процесса деформирования плети для последующей линеаризации искомым функций необходимо оценить время прохода упругой волной рельса в трех основных направлениях анизотропии рельсошпальной решетки, а затем этот временной отрезок разделить на k равных частей. Продолжительность элементарного временного интервала τ_b зависит от частоты собственных

колебаний сегмента рельсовой плети и скорости распространения упругих волн в ней.

Учитывая, что выбранный шаг интегрирования τ_b достаточно мал, можно предположить, что неизвестные функции силы взаимодействия колеса и рельса, перемещений и внутренних усилий ведут себя линейно на каждом элементарном интервале $(n - 1)\tau_b \leq t \leq n\tau_b$, т. е. производная неизвестной функции f может быть представлена как

$$\dot{f}(n\tau) = \frac{f_n - f_{n-1}}{\tau_b}.$$

Приведенная численная процедура решения полученного интегродифференциального уравнения автоматизирована с помощью стандартных возможностей и библиотек языка программирования С++ [14, 23, 25].

Результаты решения полученного уравнения с использованием описанной выше вычислительной схемы приведены на рис. 3 в виде графических зависимостей безразмерной контактной силы от безразмерного времени для различных моделей контакта колеса и рельса (1а)–(1л). Значения параметров динамического контакта колеса и рельса: $m = 12$ т, $E_r = 150$ ГПа, $E_\theta = 100$ ГПа, $G_{r\theta} = 40$ ГПа, $G_{rz} = 70$ ГПа, $G_{\theta z} = 50$ ГПа, $\sigma_r = 0,3$, $\sigma_\theta = 0,25$, $V_0 = 16,67$ м/с, $h = 0,18$ м, $R_1 = 0,02$ м, $R = 0,8$ м;

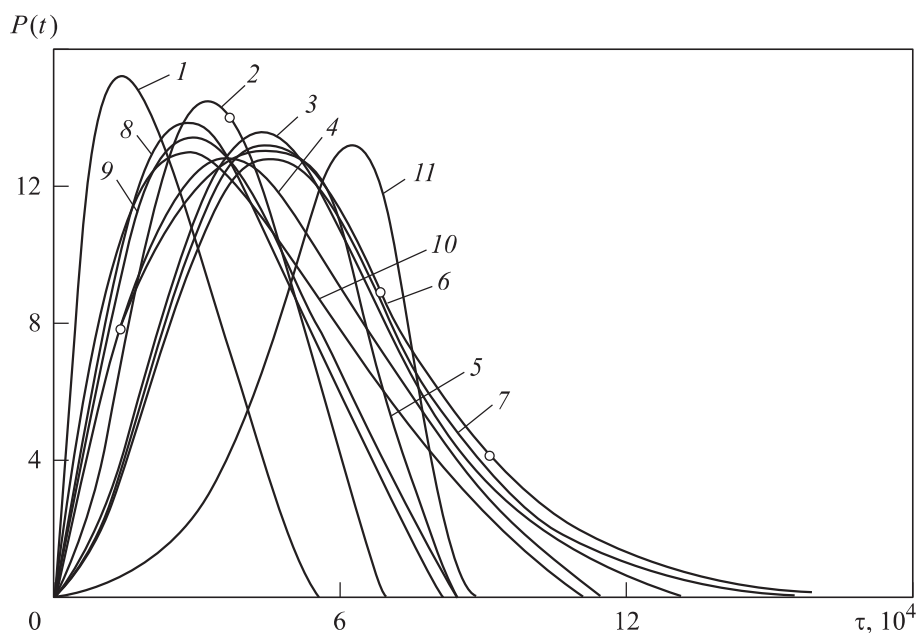


Рис. 3. Зависимость силы взаимодействия колеса и рельса от времени для различных моделей динамического контакта (кривые 1–11)

внешние усилия предварительного напряжения принимают следующие значения в безразмерном виде: $N/(h^2c_1\rho) = -20$; $M_r/(h^3c_1\rho) = 2$; $M_z/(h^3c_1\rho) = 2$. Приведенные значения соответствуют состоянию обычной рельсовой плети в кривой большого радиуса при использовании гидравлического натяжного устройства.

Кривые 1–11 (см. рис. 3) построены для соотношений (1а)–(1л) соответственно, точки, отмеченные кружками, показывают значения силы взаимодействия колеса и рельса, полученные по результатам обработки экспериментальных данных.

Заключение. В результате проведенных исследований удалось получить адекватную модель динамического поведения сегмента рельсовой плети от воздействия колесной пары в условиях, приближенных к реальным, а также разработать вычислительную процедуру, позволяющую определить динамические, кинематические и геометрические параметры деформированного состояния рельсовых плетей железнодорожного пути. Разброс кривых (см. рис. 3), полученных с использованием различных соотношений для контактной задачи, свидетельствует о возможности выбора оптимального соотношения в зависимости от геометрических, механических и конструктивных характеристик участка пути, эксплуатационных параметров и величин искомых функций, которых необходимо достичь, будь-то максимум контактной силы, время контакта, время нагружения и разгрузки, общее совпадение графической зависимости и т. д.

Предложенный подход к описанию динамического поведения сегмента рельсовой плети может быть востребован при изучении возможности повторного использования рельсов на различных участках железнодорожного пути с учетом проявившихся дефектов на поверхности катания, бокового износа и изменившихся механических характеристик материала. Результаты проведенного исследования могут быть использованы при приемочном контроле старогодных рельсов, проектировании капитальных и средних ремонтов пути, планировании графиков диагностики и мониторинга рельсовых плетей на участках железных дорог, эксплуатируемых с различной интенсивностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Емельянов С.Г., Чевычелов С.А. Методика проектирования гиперболических фрез для репрофилирования старогодных рельсов. *Известия ТулГУ. Серия: Технологическая системотехника*, 2005, № 4, с. 32–35.

- [2] Супрун П.П., Григоренко В.Г., Гончарук С.М. и др. Устройство для предупреждения бокового износа рельсов в кривых. Патент РФ 2114946. Заявл. 01.07.1996, опубл. 10.07.1998.
- [3] Керопян А.М., Балахнина Е.Е., Сагалова Р.В. Обоснование актуальности исследования проблемы взаимодействия колеса и рельса при движении локомотива в условиях карьеров. *ГИАБ*, 2013, № 3, с. 302–308.
- [4] Ромен Ю.С., Суслов О.А., Баляева А.А. Определение сил взаимодействия в системе колесо–рельс на основании измерения напряжений в шейке рельса. *Вестник ВНИИЖТ*, 2017, т. 76, № 6, с. 354–361.
DOI: <https://doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-6-354-361>
- [5] Карпущенко Н.И., Котова И.А., Котов И.Д. Новые методы экспериментальных исследований процессов в системе колесо/рельс на участках с сильно изношенными рельсами. *Вестник БелГУТа: наука и транспорт*, 2005, № 2 (11), с. 47–53.
- [6] Абдурашитов А.Ю. Повышение эффективности использования колес и рельсов за счет разработки взаимоувязанных профилей рабочих поверхностей колес и рельсов. *Бюллетень Объединенного ученого совета ОАО РЖД*, 2018, № 4, с. 27–39.
- [7] Лисицын А.И. Износостойкость рельсов: Р65-К и рельсы массовой поставки. *РСП Эксперт*, 2011, № 3, с. 28–29.
- [8] Певзнер В.О., Потапов А.В. Влияние разности подуклонки рельсов в створных сечениях на боковой износ рельсов. *Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство*, 2012, т. 5, № 5, с. 78–82.
- [9] Коган А.Я., Черняков Е.А. Оценка достаточного условия устойчивости колеса на рельсе с учетом вероятностного характера влияющих на нее некоторых факторов. *Вестник ВНИИЖТ*, 2008, № 2, с. 36–41.
- [10] Локтев А.А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2007, т. 13, № 3, с. 417–425.
- [11] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Loktev A.A. The analysis of thin-walled building structures subjected to impact excitation. *4th Int. Ph.D. Symp. in Civil Engineering, 2002*, pp. 487–492.
- [12] Локтев А.А., Королев В.В., Шишкина И.В. и др. Исследование микроструктуры рельсовой стали при высокочастотных динамических воздействиях. *Путь и путевое хозяйство*, 2019, № 5, с. 11–15.
- [13] Gridasova E.A., Nikiforov P.A., Loktev A. The influence of high-frequency cyclic loading on the mechanical properties of steel. *Mater. Sci. Forum*, 2018, vol. 945, pp. 549–555. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.549>
- [14] Loktev A.A., Korolev V.V., Shishkina I.V. High frequency vibrations in the elements of the rolling stock on the railway bridges. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 463, art. 032019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032019>
- [15] Гридасова Е.А., Локтев А.А., Никифоров П.А. и др. Влияние высокочастотных вибраций в системе «колесо–рельс» на структуру рельсовой стали М76. *Наука и техника транспорта*, 2019, № 2, с. 40–46.

- [16] Дружинина О.В., Локтев А.А., Дмитрашко А.В. и др. Исследование математической модели прогнозирования технического состояния железнодорожного пути. *Транспорт: наука, техника, управление*, 2019, № 4, с. 3–11.
- [17] Локтев А.А., Сычева А.В., Гридасова Е.А. Моделирование динамического контакта колеса и рельса с учетом различных реологических свойств материалов и волновых процессов. *Современные технологии и развитие политехнического образования*, 2015, с. 405–409.
- [18] Россихин Ю.А., Шитикова М.В., Локтев А.А. Удар шара о нелинейно упругий буфер, установленный на плите перекрытия. *Известия высших учебных заведений. Строительство*, 2004, № 11 (551), с. 16–22.
- [19] Локтев А.А., Локтев Д.А. Решение задачи ударного взаимодействия упругого тела и пластинки Уфлянда — Миндлина с помощью лучевого метода. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2010, № 2 (37), с. 94–102.
- [20] Glusberg B., Korolev V., Shishkina I., et al. Calculation of track component failure caused by the most dangerous defects on change of their design and operational conditions. *MATEC Web Conf.*, 2018, vol. 239, art. 01054.
DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823901054>
- [21] Сычев В.П., Локтев А.А., Локтев Д.А. и др. Повышение информативности оценки содержания железнодорожного пути. *Мир транспорта*, 2017, т. 15, № 2, с. 20–31.
- [22] Локтев А.А., Локтев Д.А. Выявление и детектирование внешних дефектов верхнего строения пути агрегированным методом на основе стереозрения и анализа размытия образа. *Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство*, 2017, т. 11, № 11, с. 96–100.
- [23] Loktev A.A., Loktev D.A. Transverse impact of a ball on a sphere with allowance for waves in the target. *Tech. Phys. Lett.*, 2008, vol. 34, no. 11, pp. 960–963.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785008110187>
- [24] Локтев А.А., Локтев Д.А. Решение задачи ударного взаимодействия твердого тела и сферической оболочки лучевым методом. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2007, № 2, с. 128–135.
- [25] Алфимцев А.Н., Локтев Д.А., Локтев А.А. Разработка пользовательского интерфейса комплексной системы видеомониторинга. *Вестник МГСУ*, 2012, № 11, с. 242–252.

Гридасова Екатерина Александровна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Сварочное производство» ДВФУ (Российская Федерация, 690091, Владивосток, ул. Суханова, д. 8).

Локтев Алексей Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Транспортное строительство» РУТ (МИИТ) (Российская Федерация, 125190, Москва, ул. Часовая, д. 22/2).

Илларионова Лилия Алексеевна — старший преподаватель кафедры «Здания и сооружения на транспорте» РУТ (МИИТ) (Российская Федерация, 125190, Москва, ул. Часовая, д. 22/2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гридасова Е.А., Локтев А.А., Илларионова Л.А. Моделирование поведения сегмента рельсовой плети при динамическом воздействии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 4 (91), с. 24–41.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-4-24-41>

SIMULATING THE BEHAVIOUR OF A RAIL STRING SEGMENT UNDER DYNAMIC IMPACT

E.A. Gridasova¹

olvin@list.ru

A.A. Loktev²

aaloktev@yandex.ru

L.A. Illarionova²

illarionova.roat@mail.ru

¹ **Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation**

² **Federal State Institution of Higher Education “Russian University of Transport”, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper presents a mathematical model for behaviour of a rail string segment bound by several railway sleepers. The model makes it possible to account for prestressing due to joining rail sections into a string, for anisotropic properties of the rail-and-sleeper assembly, and effects caused by the rolling stock for various initial loading conditions. We considered eleven functions describing wheel–rail contact. These functions enable us to select the most accurate model to describe the effects that vehicles have on railway segments that may differ in design specifics, mechanical properties of materials used, operation modes, and the presence of flaws on the rail tread and wheelset tread. The wave equations used to describe the behaviour of a rail string segment can simulate the process of elastic wave propagation after wheelset contact takes place, which is considerable in the case of high vehicle velocities. The investigation conducted allowed us to plot the wheel–rail interaction force for various contact models. The functions specified make it possible to select the optimum force ratio, taking

Keywords

Mathematical model, dynamic contact, wheel, rail, wave equation, the function sought for, integro-differential equation, iterative computational scheme

into account the following: geometrical, mechanical and design parameters of the railway segment; operation modes; and the functions sought for in terms of obtaining the desired maximum contact force, contact duration, and loading and relief times

Received 22.11.2019

Accepted 18.02.2020

© Author(s), 2020

REFERENCES

- [1] Emel'yanov S.G., Chevychelov S.A. Method of designing hyperbolic cutters for reprofiling old rails. *Izvestiya TulGU. Seriya: Tekhnologicheskaya sistemotekhnika*, 2005, no. 4, pp. 32–35 (in Russ.).
- [2] Suprun P.P., Grigorenko V.G., Goncharuk S.M., et al. Ustroystvo dlya preduprezhdeniya bokovogo iznosa rel'sov v krivykh [Device for prevention of rails lateral wear in curves]. Patent RU 2114946. Appl. 01.07.1996, publ. 10.07.1998 (in Russ.).
- [3] Keropyan A.M., Balakhnina E.E., Sagalova R.V. Rail rationale for news research problems of interaction with wheels and traffic locomotives in the pits. *GIAB [MIAB]*, 2013, no. 3, pp. 302–308 (in Russ.).
- [4] Romen Yu.S., Suslov O.A., Balyaeva A.A. Determining the force of interaction in a wheel–rail system based on measuring stresses in rails neck. *Vestnik naučno-issledovatel'skogo instituta železnodorožnogo transporta [Vestnik of the Railway Research Institute]*, 2017, vol. 76, no. 6, pp. 354–361 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-6-354-361>
- [5] Karpushchenko N.I., Kotova I.A., Kotov I.D. New methods of experimental researches processes in the wheel/rail system on plots with hardly worn rails. *Vestnik BelGUTA: nauka i transport [Bulletin of BSUT: Science and Transport]*, 2005, no. 2 (11), pp. 47–53 (in Russ.).
- [6] Abdurashitov A.Yu. Increasing the efficiency of the use of wheels and rails due to the development of interlocking profiles of the working surfaces of wheels and rails. *Byulleten' ob'edinennogo uchenogo soveta OAO RZhd*, 2018, no. 4, pp. 27–39 (in Russ.).
- [7] Lisitsyn A.I. Wear resistance of rails: R65-K and rails of bulk delivery. *RSP Ekspert*, 2011, no. 3, pp. 28–29 (in Russ.).
- [8] Pevzner V.O., Potapov A.V. Effect of rail sub-slope difference in sash sections on lateral wear of rails. *Vnedrenie sovremennykh konstruktsiy i peredovykh tekhnologiy v putevoe khozyaystvo*, 2012, vol. 5, no. 5, pp. 78–82 (in Russ.).
- [9] Kogan A.Ya., Chernyakov E.A. Evaluating sufficient condition of wheel–rail stability with account of probabilistic character of some influence factors. *Vestnik naučno-issledovatel'skogo instituta železnodorožnogo transporta [Vestnik of the Railway Research Institute]*, 2008, no. 2, pp. 36–41 (in Russ.).
- [10] Loktev A.A. Mechanics of composite materials and structures viscoelastic body blow to an isotropic elastic plate. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 417–425 (in Russ.).

- [11] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Loktev A.A. The analysis of thin-walled building structures subjected to impact excitation. *4th Int. Ph.D. Symp. in Civil Engineering*, 2002, pp. 487–492.
- [12] Loktev A.A., Korolev V.V., Shishkina I.V., et al. The study of the microstructure of rail steel under high-frequency dynamic effects. *Put' i putevoe khozyaystvo* [Railway Track and Facilities], 2019, no. 5, pp. 11–15 (in Russ.).
- [13] Gridasova E.A., Nikiforov P.A., Loktev A. The influence of high-frequency cyclic loading on the mechanical properties of steel. *Mater. Sci. Forum*, 2018, vol. 945, pp. 549–555. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.549>
- [14] Loktev A.A., Korolev V.V., Shishkina I.V. High frequency vibrations in the elements of the rolling stock on the railway bridges. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 463, art. 032019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032019>
- [15] Gridasova E.A., Loktev A.A., Nikiforov P.A., et al. Influence of high-frequency vibrations in the wheel and rail system on M76 rail steel structure. *Nauka i tekhnika transporta* [Science and Technology in Transport], 2019, no. 2, pp. 40–46 (in Russ.).
- [16] Druzhinina O.V., Loktev A.A., Dmitrashko A.V., et al. Research of mathematical model for forecasting railway track technical state. *Transport: nauka, tekhnika, upravlenie* [Transport: Science, Equipment, Management. Scientific Information Collection], 2019, no. 4, pp. 3–11 (in Russ.).
- [17] Loktev A.A., Sycheva A.V., Gridasova E.A. Modeling of wheel and a rail dynamic contact taking into account various rheological properties of materials and wave processes. *Sovremennye tekhnologii i razvitie politekhnicheskogo obrazovaniya*, 2015, pp. 405–409 (in Russ.).
- [18] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Loktev A.A. Impact of a sphere against a nonlinear elastic buffer on an overlapping plate. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction], 2004, no. 11 (551), pp. 16–22 (in Russ.).
- [19] Loktev A.A., Loktev D.A. Solution to problem of impact interaction between elastic body and Ufland — Mindlin plate using ray method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2010, no. 2 (37), pp. 94–102 (in Russ.).
- [20] Glusberg B., Korolev V., Shishkina I., et al. Calculation of track component failure caused by the most dangerous defects on change of their design and operational conditions. *MATEC Web Conf.*, 2018, vol. 239, art. 01054. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823901054>
- [21] Sychev V.P., Loktev A.A., Loktev D.A., et al. Increase in informative value of railway track maintenance assessment. *Mir transporta* [World of Transport and Transportation], 2017, vol. 15, no. 2, pp. 20–31 (in Russ.).
- [22] Loktev A.A., Loktev D.A. [Identification and detection of external defects of path upper structure using aggregated method based on stereovision and image blur analysis]. *Vnedrenie sovremennykh konstruktsiy i peredovykh tekhnologiy v putevoe khozyaystvo*

[Introduction of Modern Designs and Advanced Technologies in the Track Economy], 2017, vol. 11, no. 11, pp. 96–100 (in Russ.).

[23] Loktev A.A., Loktev D.A. Transverse impact of a ball on a sphere with allowance for waves in the target. *Tech. Phys. Lett.*, 2008, vol. 34, no. 11, pp. 960–963.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785008110187>

[24] Loktev A.A., Loktev D.A. The ray method in problem of an impact interaction of a solid body and a spherical shell. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2007, no. 2, pp. 128–135 (in Russ.).

[25] Alfimtsev A.N., Loktev D.A., Loktev A.A. Development of a user interface for an integrated system of video monitoring. *Vestnik MGSU*, 2012, no. 11, pp. 242–252 (in Russ.).

Gridasova E.A. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Production Welding, Far Eastern Federal University (Sukhanova ul. 8, Vladivostok, 690091 Russian Federation).

Loktev A.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Head of Department of Transport Construction, Federal State Institution of Higher Education “Russian University of Transport” (Chasovaya ul. 22/2, Moscow, 125190 Russian Federation).

Illarionova L.A. — Assist. Professor, Department of Buildings and Structures in Transport, Federal State Institution of Higher Education “Russian University of Transport” (Chasovaya ul. 22/2, Moscow, 125190 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gridasova E.A., Loktev A.A., Illarionova L.A. Simulating the behaviour of a rail string segment under dynamic impact. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 4 (91), pp. 24–41 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-4-24-41>