УДК 519.234+519.254+519.7 DOI: 10.18698/1812-3368-2020-6-4-22

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

С.А. Булгаков[1] s.a.bulgakov@gmail.com
В.М. Горшкова[2] gvera@bmstu.ru
В.М. Хаметов[1] khametovvm@mail.ru

[1] **НИУ ВШЭ, Москва, Российская Федерация**
[2] **МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

Аннотация

Работа посвящена решению проблемы стохастического восстановления квадратично интегрируемых относительно меры Лебега функций, заданных на действительной прямой по наблюдениям за ними с аддитивным белым гауссовым шумом, для случая дискретного времени. Проблема является задачей непараметрического (бесконечномерного) оценивания. Обоснована процедура оптимального восстановления, в среднеквадратическом смысле, относительно произведения меры Лебега и гауссовой меры. Описан алгоритм восстановления таких квадратично интегрируемых функций. Установлено, что построенная процедура непараметрического восстановления квадратично интегрируемой функции дает несмещенное и состоятельное восстановление неизвестной функции. Это новый результат. Кроме того, для гладких восстанавливаемых функций предложена и обоснована почти оптимальная процедура восстановления, которая дает неулучшаемую (по порядку величины) оценку зависимости числа ортогональных функций от числа наблюдений. Погрешность построенной почти оптимальной процедуры восстановления по отношению к оптимальной процедуре восстановления составляет не более 50 %

Ключевые слова

Ортогональные функции, коэффициенты Фурье, погрешность наблюдения, проекционная оценка, несмещенность, состоятельность

Поступила 14.01.2020
Принята 26.06.2020

Введение. Работа посвящена решению задачи стохастического восстановления квадратично интегрируемой функции относительно меры Лебега, заданной на действительной прямой $\mathbb{R}^1$ по наблюдениям за ней в каждой точке действительной прямой с независимыми гауссовыми ошибками в дискретном времени. Для восстанавливаемой функции найдены условия существования оптимальной процедуры восстановления по критерию минимума среднеквадратической ошибки, а также условия ее состоятельности и несмещенности. Кроме того, приведена почти оптимальная процедура восстановления, которая дает по порядку величины неулучшаемую оценку зависимости числа ортогональных функций от числа наблюдений.

Под задачей стохастического восстановления любой квадратично интегрируемой функции обычно понимают следующее: предположено, что имеется возможность наблюдать значение этой функции с гауссовыми ошибками в любой точке области ее определения. Задача состоит в восстановлении неизвестной функции по результатам наблюдений в дискретном времени в соответствии с критерием минимума среднеквадратической ошибки. Следует отметить, что задача относится к задачам непараметрического (бесконечномерного) оценивания в некотором базисе. В качестве ортонормированного базиса использован тригонометрический. Задачам непараметрического оценивания посвящено множество работ, например [1–11].

Приведем краткий обзор результатов по теории стохастического восстановления функций.

Метод решения задачи восстановления, который основан на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливенко — Кантелли, предложен в [1, 2]. Подробный обзор результатов по теории стохастического восстановления представлен в [3, 4]. Минимаксная постановка задачи стохастического восстановления для нелинейных функционалов, решение которой существенным образом опирается на результаты, приведенные в [3], рассмотрена в [5, 6].

Для конечных линейных комбинаций ортогональных функций в предположении, что наблюдается последовательность, представляющая собой аддитивную смесь восстанавливаемой функции с белым гауссовым шумом (в каждой точке области определения этой функции), в [7, 8] предложены рекуррентные алгоритмы стохастического восстановления.

Задача стохастического восстановления неизвестной квадратично интегрируемой плотности распределения, которая наблюдается в дискретном времени с аддитивным белым шумом в каждой точке области определения этой плотности, рассмотрена в [9] в предположении, что она допускает линейную аппроксимацию относительно некоторого базиса. Установлено, что при фиксированном числе наблюдений существует подмножество квадратично интегрируемых плотностей (явный вид которого предъявлен), которые допускают почти оптимальное восстановление, причем для этого достаточно взять некоторое конечное число ортогональных функций.

Задача стохастического восстановления неизвестной квадратично интегрируемой на отрезке $[0,1]$ функции, когда наблюдается в каждый момент времени $t \in [0,1]$ случайный процесс, представимый в виде суммы интеграла от неизвестной функции и винеровского процесса, решена в [10]. В этой работе описан класс функций: 1) периодических (с периодом, равным единице); 2) k-раз дифференцируемых $(0 < k < \infty)$, причем k-я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0,1]$, норма которых в пространстве L_∞ ограничена сверху некоторой константой K. Для второго класса доказано, что существует почти оптимальное восстановление этой функции.

Условия существования ε-оптимальных ядерных оценок для неизвестных квадратично интегрируемых функций, заданных на отрезке $[0,1]$, установлены в [11].

В отличие от работ [1–11] здесь для любой квадратично интегрируемой функции, заданной на всей числовой прямой $\mathbb{R}^1$, решена задача стохастического восстановления, оптимального в среднеквадратическом смысле. Установлены условия существования решения этой задачи и приведен явный вид этой непараметрической оценки (теорема 2) — простой процедуры оценивания коэффициентов Фурье. В ней также установлены условия несмещенности (теорема 3) и состоятельности (теорема 4) восстанавливаемой функции. Кроме того, построена почти оптимальная процедура стохастического восстановления, обеспечивающая для любой гладкой квадратично интегрируемой функции наилучшее по порядку величины соотношение между числом ортогональных функций и числом наблюдений.

Постановка задачи стохастического восстановления. Приведем сведения из функционального анализа и теории вероятностей, необходимые для формулирования задачи стохастического восстановления. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right)$ — борелевская σ-алгебра, $L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ — множество квадратично интегрируемых относительно меры Лебега Λ функций $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, обозначаемых $f(x)$, $L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ — сепарабельное гильбертово пространство, в котором существует полный ортонормированный базис, например тригонометрический [12].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство и имеется произведение таких пространств, т. е. $\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right) \otimes \mathcal{F},\ \Lambda \times \mathrm{P}\right)$.

Через $\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times \mathrm{P}\right)$ обозначим множество измеримых относительно $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right) \otimes \mathcal{F}$ функций $\varphi(x, \omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ таких, что

$\int\limits_{\mathbb{R}^1 \times \Omega} |\varphi(x,\omega)|^2 \, dx \, dP < \infty$. Пространство $\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega,\ \Lambda \times P\right)$ является гильбертовым, а функции $\varphi(x,\omega)$ называют квадратично интегрируемыми относительно меры $\Lambda \times P$. Отметим, что в силу теоремы Фубини $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x,\omega)\, dx < \infty$ — P-п.н.

Пусть $\{n_m(x)\}_{\substack{m \in \{1,\, \ldots,\, N\} \\ x \in \mathbb{R}^1}}$ — семейство гауссовых случайных функций, причем для любого m $n_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times P\right)$ такое, что:

1) для любого $(m, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \mathbb{R}^1$

$$\mathrm{E} n_m(x) = 0; \tag{1}$$

2) для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $k, m \in \{1, \ldots, N\}$

$$\mathrm{E} n_m(x)\, n_k(x) = \delta_{m,k} \sigma^2, \tag{2}$$

где $\delta_{m,k}$ — символ Кронекера;

3) для любых $m \in \{1, \ldots, N\}$ и $x, y \in \mathbb{R}^1$, причем $x \neq y$,

$$\mathrm{E} n_m(x)\, n_m(y) = 0. \tag{3}$$

Пусть $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — борелевская функция такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^2 \, dx < < \infty$, т. е. $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$.

Пусть $y_m(x)$ для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $m \in \{1, \ldots, N\}$ — наблюдаемая частичная последовательность функций

$$y_m(x) = f(x) + n_m(x), \tag{4}$$

где $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$; $n_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times P\right)$ и удовлетворяет соотношениям (1)–(3). Очевидно, $y_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times P\right)$.

Исследуем свойства σ-алгебр, порожденных семейством $\{y_m(x)\}_{\substack{m \in \{1, \ldots, N\} \\ x \in \mathbb{R}^1}}$. Пусть $\mathcal{F}_m^y \triangleq \sigma\left\{y_1(x), \ldots, y_m(x), x \in \mathbb{R}^1\right\}$. Очевидно, имеют место включения $\mathcal{F}_m^y \subseteq \mathcal{F}_{m+1}^y \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_N^y$, т. е. семейство $\left\{\mathcal{F}_m^y\right\}_{m \in \{1, \ldots, N\}}$ — фильтрация на измеримом пространстве $\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right) \otimes \mathcal{F}\right)$.

Постановка задачи стохастического восстановления. Пусть для любых $m \in \{1, \dots, N\}$ и $x \in \mathbb{R}^1$ наблюдению доступна борелевская функция $y_m(x)$, допускающая представление (4), где $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ — неизвестная функция, $n_m(x)$ — погрешности наблюдения за функцией $f(x)$. Требуется восстановить функцию $f(x)$ по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Перейдем к точной формулировке задачи. Для этого потребуется дать несколько определений.

Определение 1. *$\mathcal{F}_m^y$-измеримую функцию, обозначаемую $\hat{f}_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times \mathrm{P}\right)$, такую, что $\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left|\hat{f}_m(x)\right|^2 dx < \infty$, назовем непараметрической оценкой неизвестной функции $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ по наблюдениям $\{y_m(x)\}_{\substack{m \in \{1, \dots, N\} \\ x \in \mathbb{R}^1}}$.*

Задача стохастического восстановления состоит в построении $\mathcal{F}_m^y$-измеримой функции $\hat{f}_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times \mathrm{P}\right)$ такой, что

$$\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left[f(x) - \hat{f}_m(x) \right]^2 dx \to \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega,\ \Lambda \times \mathrm{P}\right)}.$$

Определение 2. *$\mathcal{F}_m^y$-измеримую функцию $\hat{f}_m^0(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times \mathrm{P}\right)$ назовем оптимальной, если*

$$\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left[f(x) - \hat{f}_m^0(x) \right]^2 dx = \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega,\ \Lambda \times \mathrm{P}\right)} \mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left[f(x) - \hat{f}_m(x) \right]^2 dx. \quad (5)$$

Цель работы:

– установить условия, при выполнении которых для любого $m \in \{1, \dots, N\}$ существует $\hat{f}_m^0(x)$ — $\mathcal{F}_m^y$-измеримая функция такая, что для любой $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ выполнено (5);

– установить такие свойства $\hat{f}_m^0(x)$, как несмещенность и состоятельность;

– разработать процедуры восстановления, обеспечивающие существование неулучшаемого соотношения между числом ортогональных функций и числом наблюдений.

Коэффициенты Фурье и проекционные оценки в задаче стохастического восстановления. Для модели наблюдений, описываемой (4), приведем представление слагаемых через их коэффициенты Фурье.

Описание неизвестной восстанавливаемой функции. Пусть $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ — сепарабельное гильбертово пространство, поэтому в нем всегда существует тригонометрический базис $\exp\{2\pi ijx\}$, $i \triangleq \sqrt{-1}$, являющийся полным. Таким образом, существуют единственные коэффициенты Фурье функции $f(x)$, обозначаемые $\{\alpha_j\}_{j\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}}$ и допускающие представление [12]:

$$\alpha_j = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\exp\{-2\pi ijx\}\,dx. \tag{6}$$

Согласно теории рядов Фурье [13], для почти всех $x \in \mathbb{R}^1$ относительно меры Лебега Λ

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \exp\{2\pi ijx\}. \tag{7}$$

Описание погрешностей наблюдения. Рассмотрим $n_m(x)$ — второе слагаемое в (4), которое описывает погрешности наблюдения за функцией $f(x)$. В силу (2) оно является квадратично интегрируемой функцией относительно меры $\Lambda \times \mathrm{P}$. Кроме того, в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} n_m^2(x)dx < \infty \ \text{— P-п.н.} \tag{8}$$

Поэтому для любого $m \in \{1,\ldots,N\}$ существуют коэффициенты Фурье, обозначаемые $\left\{n_m^j\right\}_{j\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}}$ и являющиеся случайными величинами, которые для любых $(m,j) \in \{1,\ldots,N\}\times\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ допускают представление

$$n_m^j = \int\limits_{\mathbb{R}^1} n_m(x)\exp\{-2\pi ijx\}\,dx \ \text{— P-п.н.} \tag{9}$$

Кроме того, почти всюду относительно меры $\Lambda \times \mathrm{P}$

$$n_m(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} n_m^j \exp\{2\pi ijx\}. \tag{10}$$

В силу теоремы Фубини и (9), (10), а также предположений (1)–(3) имеем:

1) для любых $(m,j) \in \{1,\ldots,N\}\times\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

$$\mathrm{E} n_m^j = 0; \tag{11}$$

2) для любых $(j, j') \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и $k, m \in \{1, \dots, N\}$

$$\mathrm{E} n_m^j n_k^{j'} = \delta_{m,k} \delta_{j,j'} \sigma_j^2; \tag{12}$$

3)
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 = \sigma^2 < \infty. \tag{13}$$

Предположим, что коэффициенты Фурье n_m^j удовлетворяют следующим условиям.

Условия (*n*). Семейство случайных величин $\left\{ n_m^j \right\}_{\substack{m \in \{1,\dots,N\} \\ j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}}}$ образует гауссову систему [14], причем

1) при каждом $j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — это частичная последовательность $\left\{ n_m^j \right\}_{m \in \{1,\dots,N\}}$ независимых в совокупности гауссовых случайных величин, причем $\mathrm{Law}\left(n_m^j \right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma_j^2 \right)$, $\mathrm{Cov}\left(n_m^j, n_k^j \right) = \delta_{m,k} \sigma_j^2$;

2) при каждом $m \in \{1, \dots, N\}$ семейство $\left\{ n_m^j \right\}_{j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}}$ — гауссова система такая, что $\mathrm{Law}\left(n_m^j \right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma_j^2 \right)$, $\mathrm{Cov}\left(n_m^j, n_m^{j'} \right) = \delta_{j,j'} \sigma_j^2$ не зависит от m.

Коэффициенты Фурье для наблюдаемой последовательности функций. С учетом изложенного наблюдения $y_m(x)$ можно представить с использованием коэффициентов Фурье. В силу (4) у случайной функции $y_m(x)$ определены коэффициенты Фурье, обозначаемые y_m^j, которые являются случайными величинами и P-п.н. допускают представление

$$y_m^j \triangleq \int_{\mathbb{R}^1} y_m(x) \exp\{-2\pi i j x\} dx, \tag{14}$$

причем $\Lambda \times \mathrm{P}$ почти всюду

$$y_m(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_m^j \exp\{2\pi i j x\}. \tag{15}$$

Из (4), (6), (9) и (14) следует, что каждый элемент семейства $\left\{ y_m^j \right\}_{\substack{m \in \{1,\dots,N\} \\ j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}}}$ допускает представление

$$y_m^j = \alpha_j + n_m^j. \tag{16}$$

Согласно условиям (n) и (16), семейство случайных величин $\left\{y_m^j\right\}_{\substack{m\in\{1,\ldots,N\}\\ j\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}}}$ образует гауссову систему, причем:

1) для любых $(m,j)\in\{1,\ldots,N\}\times\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

$$\mathrm{Law}\left(y_m^j\right)=\mathcal{N}\left(\alpha_j,\sigma_j^2\right); \tag{17}$$

2) для каждых $j,j'\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ и $k,m\in\{1,\ldots,N\}$ случайные величины y_m^j и y_k^j $\left(y_m^j \text{ и } y_m^{j'}\right)$ не коррелированы, причем

$$\mathrm{Cov}\left(y_m^j, y_k^j\right)=\delta_{m,k}\sigma_j^2, \tag{18}$$

$$\mathrm{Cov}\left(y_m^j, y_m^{j'}\right)=\delta_{j,j'}\sigma_j^2. \tag{19}$$

Описание фильтраций по результатам наблюдений. Проекционные оценки (определение). Установим совпадение σ-алгебр, порожденных $\{y_1(x),\ldots,y_m(x)\}_{x\in\mathbb{R}^1}$ и $\left\{y_1^j,\ldots,y_m^j\right\}_{j\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}}$. Выше была введена σ-алгебра, обозначенная как $\mathcal{F}_m^y$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}_m^{y^j}}$ — σ-алгебра, порожденная $\left\{y_1^j,\ldots,y_m^j\right\}$, т. е.

$$\widetilde{\mathcal{F}_m^{y^j}}\triangleq\left\{y_1^j,\ldots,y_m^j\right\}.$$

Пусть

$$\widetilde{\mathcal{F}_m^y}\triangleq\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right)\otimes\left(\bigotimes_{j=-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathcal{F}_m^{y^j}}\right).$$

Без ограничения общности можно полагать, что $\widetilde{\mathcal{F}_1^y}$ пополнено множествами нулевой меры $\Lambda\times\mathrm{P}$. Поэтому в силу (15) легко убедиться в том, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in L_2\left(\mathbb{R}^1,\Lambda\right)$ *и выполнены условия (п). Тогда для* $m\in\{1,\ldots,N\}$ $\mathcal{F}_m^y=\widetilde{\mathcal{F}_m^y}$.

Доказательство утверждения теоремы 1 простое, однако изложение его громоздко, поэтому здесь не приведено. Из теоремы 1 следует, что в дальнейших построениях достаточно рассматривать фильтрацию $\left\{\widetilde{\mathcal{F}_m^y}\right\}$ вместо $\left\{\mathcal{F}_m^y\right\}$.

Следовательно, в качестве оценки неизвестной функции $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$, обозначаемой $\hat{f}_m(x)$, можно рассматривать любую $\widetilde{\mathcal{F}_m^y}$-измеримую функцию $\tilde{f}_m(x)$ такую, что

$$\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left|\tilde{f}_m(x)\right|^2 dx < \infty. \tag{20}$$

Без ограничения общности можно полагать, что

1) $\hat{f}_m(x) = \tilde{f}_m(x)$ почти всюду относительно меры $\Lambda \times \mathrm{P}$;

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \left|\tilde{f}_m(x)\right|^2 dx < \infty$ — P-п.н.

Следовательно, $\tilde{f}_m(x)$ допускает представление

$$\tilde{f}_m(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{jm} \exp\{2\pi i j x\}, \tag{21}$$

где $\tilde{\alpha}_{jm}$ — $\widetilde{\mathcal{F}_m^{y^j}}$-измеримы и являются коэффициентами Фурье,

$$\tilde{\alpha}_{jm} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \tilde{f}_m(x) \exp\{-2\pi i j x\} dx. \tag{22}$$

Ясно, что $\tilde{\alpha}_{jm} \in \ell_{2m}(\mathrm{P})$, где

$$\ell_{2m}(\mathrm{P}) \triangleq$$

$$\triangleq \left\{ \text{множество } \widetilde{\mathcal{F}_m^{y^j}}\text{-измеримых случайных величин } \tilde{\alpha}_{jm} : \mathrm{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\alpha}_{jm}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Из (20)–(22) следует равенство

$$\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left|\tilde{f}_m(x)\right|^2 dx = \mathrm{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{jm}^2, \tag{23}$$

которое обобщает известное равенство Парсеваля [13]. Равенство (23) приводит к следующим определениям.

Определение 3 [9, 10]. *Проекционной оценкой неизвестной функции $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ при фиксированном тригонометрическом базисе назовем $\widetilde{\mathcal{F}_m^y}$-измеримую функцию $\tilde{f}_m(x)$, определяемую (21), причем ее коэффициенты Фурье удовлетворяют (22).*

Таким образом, задача стохастического восстановления квадратично интегрируемой неизвестной функции $f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ может быть сведена к построению ее проекционной оценки $\tilde{f}_m(x)$.

Определение 4. *Проекционную оценку* $\tilde{f}_m^0(x)$ *назовем оптимальной, если*

$$\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left|f(x)-\tilde{f}_m^0(x)\right|^2 dx = \inf_{\tilde{f}_m(x)\in\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1\times\Omega,\ \Lambda\times\mathrm{P}\right)} \mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left|f(x)-\tilde{f}_m(x)\right|^2 dx.$$

Оптимальные в среднеквадратическом смысле непараметрические оценки восстанавливаемой функции. Теперь можно сформулировать один из основных результатов.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для почти всех $x\in\mathbb{R}^1$ *и* $m\in\{1,\ldots,N\}$ *существует оптимальная проекционная оценка* $\tilde{f}_m^0(x)\in\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1\times\Omega,\ \Lambda\times\mathrm{P}\right)$, *которая* $\Lambda\times\mathrm{P}$ *-п.в. допускает представление*

$$\tilde{f}_m^0(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}_{jm}^0\exp\{2\pi ijx\}, \tag{24}$$

причем

$$\tilde{\alpha}_{jm}^0=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}y_k^j, \tag{25}$$

где y_k^j *— коэффициенты Фурье, определяемые (16) и образующие гауссову систему, причем для любого* k

$$\mathrm{Law}\left(y_k^j\right)=\mathcal{N}\left(\alpha_j,\sigma_j^2\right); \tag{26}$$

2) дисперсия оптимальной проекционной оценки $\tilde{f}_m^0(x)$ *допускает представление*

$$\inf_{\tilde{f}_m(x)\in\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1\times\Omega,\ \Lambda\times\mathrm{P}\right)} \mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}_m(x)\right]^2 dx =$$

$$=\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}_m^0(x)\right]^2 dx=\frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sigma_j^2=\frac{\sigma^2}{m}. \tag{27}$$

◄ Сначала докажем, что $\tilde{f}_m^0(x)$ имеет вид (24) и (25), для этого достаточно установить справедливость (26). Рассмотрим

$$\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}_m(x)\right]^2 dx,$$

где $\tilde{f}_m(x)$ определяется (21). В силу (23) имеем

$$\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}_m(x)\right]^2 dx=\mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\alpha_j-\tilde{\alpha}_{jm}\right|^2. \qquad (28)$$

Из (28) следует, что

$$\inf_{\tilde{f}_m(x)\in\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1\times\Omega,\ \Lambda\times\mathrm{P}\right)}\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}_m(x)\right]^2 dx=\inf_{\tilde{\alpha}_{jm}\in\ell_{2m}(\mathrm{P})}\mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\alpha_j-\tilde{\alpha}_{jm}\right|^2.$$

Для удобства изложения обозначим левую часть последнего равенства через $\mathcal{I}(m,\mathrm{P})$. Очевидно неравенство

$$\mathcal{I}(m,\mathrm{P})\geq\sum_{j=-\infty}^{\infty}\inf_{\tilde{\alpha}_{jm}\in\ell_{2m}(\mathrm{P})}\mathrm{E}\left|\alpha_j-\tilde{\alpha}_{jm}\right|^2.$$

В таком случае по наблюдениям (16) для любого $j\in\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ и $m\in\{1,\dots,N\}$ существует $\tilde{\alpha}^0_{jm}$ такая, что [15]

$$\inf_{\tilde{\alpha}_{jm}\in\ell_{2m}(\mathrm{P})}\mathrm{E}\left|\alpha_j-\tilde{\alpha}_{jm}\right|^2=\mathrm{E}\left|\alpha_j-\tilde{\alpha}^0_{jm}\right|^2.$$

Величина $\tilde{\alpha}^0_{jm}$ совпадет с оценкой максимального правдоподобия [15], когда наблюдаемая последовательность $\left\{y^j_m\right\}$ при фиксированных j допускает представление (16). Поэтому для любых $j\in\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ и $m\in\{1,\dots,N\}$ $\tilde{\alpha}^0_{jm}$ имеет вид (16). Из (16) также следует, что y^j_k образуют гауссову систему. Умножим левую и правую часть (25) на $\exp\{2\pi ijx\}$, а затем выполним суммирование по всем j. В результате получим равенство (24). Таким образом, пункт 1 теоремы 2 доказан.

Установим пункт 2 теоремы. Найдем значение $\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}^0_m(x)\right]^2 dx$ в силу (25)

$$\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left[f(x)-\tilde{f}^0_m(x)\right]^2 dx=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left|\tilde{\alpha}^0_{jm}-\alpha_j\right|^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}y^j_k-\alpha_j\right|^2=$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}n^j_k\right)^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^2_j}{m}=\frac{\sigma^2}{m}. \blacktriangleright$$

Замечание 1. *Поскольку для любых* $m\in\{1,\dots,N\}$ *и* $x\in\mathbb{R}^1$ *наблюдаемая функция* $y_m(x)$ *допускает представление*

$$y_m(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}y^j_m\exp\{2\pi ijx\},$$

в силу теоремы Фубини и (24), (25) имеем

$$\tilde{f}_m^0(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{jm}^0 \exp\{2\pi ijx\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k^j \exp\{2\pi ijx\} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_k^j \exp\{2\pi ijx\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k(x). \quad (29)$$

Отметим, что (29) неудобна для применения, поскольку требуется проводить наблюдения в каждой точке действительной прямой.

Свойства оптимальных проекционных оценок. *Несмещенность.* Установим, что оценка (24) является несмещенной.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оценка (24) несмещенная.*

◄ Из (24) для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $m \in \{1, \ldots, N\}$ в силу теоремы Фубини имеем

$$\mathrm{E}\tilde{f}_m^0(x) = \mathrm{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{jm}^0 \exp\{2\pi ijx\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ijx\} \mathrm{E}\tilde{\alpha}_{jm}^0 =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ijx\} \frac{1}{m} \mathrm{E} \sum_{k=1}^{m} y_k^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ijx\} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_j + \mathrm{E}n_k^j\right) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ijx\} \alpha_j = f(x). \text{ ►}$$

Состоятельность. Установим достаточные условия состоятельности оценки (24).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых $x \in \mathbb{R}^1$ оценка, определяемая (24), состоятельна.*

◄ Необходимо установить, что для любого $x \in \mathbb{R}^1$

$$\tilde{f}_m^0(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathrm{P}} f(x).$$

Достаточно доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}^1$ дисперсия $\tilde{f}_m^0(x)$, обозначаемая $\mathrm{D}\tilde{f}_m^0(x)$, стремится к нулю, когда $m \to +\infty$. Для этого вычислим значение $\mathrm{D}\tilde{f}_m^0(x)$. В силу теоремы Фубини из (24) и теоремы 3 следует

$$\mathrm{D}\tilde{f}_m^0(x) = \mathrm{E}\left[\tilde{f}_m^0(x) - f(x)\right]^2 = \mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{\alpha}_{jm}^0 - \alpha_j\right) \exp\{2\pi ijx\}\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j - \alpha_j\right)\exp\{2\pi ijx\}\right]^2 = \mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n_k^j \exp\{2\pi ijx\}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sigma_j \exp\{2\pi ijx\}\right)^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}\sigma_j^2 \,|\exp\{4\pi ijx\}| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_j^2}{m} = \sigma^2 < \infty.$$

Таким образом, в соответствии с (13) и из последнего неравенства следует утверждение теоремы. ►

Почти оптимальная процедура восстановления гладких квадратично интегрируемых функций. В силу замечания 1 оценку (24) сложно использовать на практике, поэтому здесь будет построена процедура восстановления функции, которая требует конечного числа ортогональных функций в зависимости от числа наблюдений. Как будет показано ниже, такое соотношение существует всегда для гладких квадратично интегрируемых функций.

Оценка сверху для гладких квадратично интегрируемых функций. Обозначим через $\Xi_2(\beta, \mathrm{L}) \subset L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)$ — множество q раз дифференцируемых квадратично интегрируемых функций

$$\Xi_2(\beta, \mathrm{L}) \triangleq \left\{ f(x) \in L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right) : \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\alpha_j\right|^2 (1 + |j|)^{2\beta} < \mathrm{L}^2 \right\}, \qquad (30)$$

причем q-я производная $(1 < q < \infty)$ функции $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$\left|\frac{d^q f}{dx^q}(x+\Delta) - \frac{d^q f}{dx^q}(x)\right| \le \mathrm{L}\left|\Delta\right|^{\alpha}, \text{ для } x, (x+\Delta) \in \mathbb{R}^1, \qquad (31)$$

где $\beta = q + \alpha;\ \ \alpha \in (0, 1]$.

Определение 5. *Будем называть варианты* $\{A_j\}$, $\{B_j\}$ *эквивалентными (по порядку величины) и обозначать* $A_j \asymp B_j$, *если для любого* $j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *существуют константы* $0 < C_1 < C_2 < \infty$ *такие, что* $C_1 < A_j / B_j < C_2$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть* $|k| < \infty$ *— любое, а* $\tilde{f}_{km}^0(x)$ *допускает представление*

$$\tilde{f}_{km}^0(x) \triangleq \sum_{j=-k}^{k} \tilde{\alpha}_{jm}^0 \exp\{2\pi ijx\}, \qquad (32)$$

где $\tilde{\alpha}^0_{jm}$ *имеет вид (25). Пусть* $f(x) \in \Xi_2(\beta, \mathrm{L})$ *определяется (30), причем имеет место (31). Тогда для любых* k *и фиксированного* m *справедливо неравенство*

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{E} \int_{\mathbb{R}^1} \left[f(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right]^2 \le 2(\mathrm{L})^{2/(2\beta+1)} \left(\frac{\max_j \sigma_j^2}{m} \right)^{2\beta/(2\beta+1)},$$

при этом

$$k \asymp m^{1/(2\beta+1)}. \tag{33}$$

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда*

$$\sup_{f(x) \in \Xi_2(\beta, \mathrm{L})} \inf_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{E} \int_{\mathbb{R}^1} \left[f(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right]^2 dx \le 2(\mathrm{L})^{2/(2\beta+1)} \left(\frac{\max_j \sigma_j^2}{m} \right)^{2\beta/(2\beta+1)}. \tag{34}$$

Отсюда следует, что оценка (34) неулучшаемая.

Доказательство теоремы 5 опирается на вспомогательные утверждения. Обозначим

$$f_k(x) \triangleq \sum_{j=-k}^{k} \alpha_j \exp\{2\pi i j x\}. \tag{35}$$

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in \Xi_2(\beta, \mathrm{L})$. *Пусть* $f_k(x)$ *имеет вид (35), тогда*

$$\| f(x) - f_k(x) \|^2_{L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)} \le \mathrm{L}^2 (1 + 2|k|)^{-2\beta}. \tag{36}$$

◄ Докажем лемму 1:

$$\| f(x) - f_k(x) \|^2_{L_2\left(\mathbb{R}^1, \Lambda\right)} = \sum_{|j| \ge k+1} \left| \alpha_j \right|^2 \le \sum_{|j| \ge k+1} \left| \alpha_j \right|^2 (1 + |j|^{2\beta}) \le \mathrm{L}^2.$$

Очевидно, что

$$\sum_{|j| \ge k+1} \left| \alpha_j \right|^2 \le \sum_{|j| \ge k+1} \left| \alpha_j \right|^2 \left(1 + 2|k|\right)^{2\beta} < \mathrm{L}^2.$$

Отсюда следует утверждение леммы. ►

Лемма 2. *Пусть* $f_k(x)$ *определяется (35), а* $\tilde{f}^0_{km}(x)$ *— (32), причем* $\tilde{\alpha}^0_{jm}$ *допускает представление (25). Тогда*

$$\mathrm{E} \int_{\mathbb{R}^1} \left| f_k(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx = \frac{1}{m} \sum_{|j|=0}^{k} \sigma_j^2 \le \frac{\left(1 + 2|k|\right)}{m} \max_j \sigma_j^2. \tag{37}$$

◄ Рассмотрим расстояние в $\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^1 \times \Omega, \Lambda \times \mathrm{P}\right)$ между $f_k(x)$ и функцией $\tilde{f}^0_{km}(x)$. Из (32) и (35) имеем

$$\mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| f(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx = \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| \sum_{l=-(k+1)}^{k+1} (\alpha_l - \tilde{\alpha}^0_{lm}) \exp\{2\pi i l x\} \right|^2 dx =$$

$$= \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| \sum_{l=-(k+1)}^{k+1} \left(\alpha_l - \frac{1}{m} \sum_{q=1}^{m} y^l_q \right) \exp\{2\pi i l x\} \right|^2 dx =$$

$$= \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| \sum_{l=-(k+1)}^{k+1} \left(\frac{1}{m} \sum_{q=1}^{m} n^l_q \right) \exp\{2\pi i l x\} \right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{l=-(k+1)}^{k+1} \sigma^2_l \le \frac{(2\,|\,k\,|+1)}{m} \max_l \sigma^2_l. \qquad (38)$$

В силу (32) и (35), а также того, что $y^l_q = \alpha_l + n^l_q$, имеем искомое утверждение. ►

Доказательство теоремы 5. ◄ Из утверждений лемм 1 и 2, а также (30), (32) следуют соотношения

$$\mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| f(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx = \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| f(x) - f_k(x) + f_k(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \left| f(x) - f_k(x) \right|^2 dx + \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| f_k(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx \le$$

$$\le \frac{\mathrm{L}^2}{(1+2\,|\,k\,|)^{2\beta}} + \frac{\sum_{|j|=0}^{k} \sigma^2_j}{m} \le \frac{\mathrm{L}^2}{(1+2\,|\,k\,|)^{2\beta}} + \frac{(1+2\,|\,k\,|)}{m} \max_j \sigma^2_j. \qquad (39)$$

Из (39) имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{E}\int_{\mathbb{R}^1} \left| f(x) - \tilde{f}^0_{km}(x) \right|^2 dx \le \inf_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\mathrm{L}^2}{(1+2\,|\,k\,|)^{2\beta}} + \frac{(1+2\,|\,k\,|)}{m} \max_j \sigma^2_j \right) \asymp$$

$$\asymp \inf_{k\in\mathbb{Z}} \max\left(\frac{\mathrm{L}^2}{(1+2\,|\,k\,|)^{2\beta}}, \frac{(1+2\,|\,k\,|)}{m} \max_j \sigma^2_j \right) \asymp$$

$$\asymp \sup_{k\in\mathbb{Z}} \min\left(\frac{\mathrm{L}^2}{(1+2\,|\,k\,|)^{2\beta}}, \frac{(1+2\,|\,k\,|)}{m} \max_j \sigma^2_j \right). \qquad (40)$$

Из (40) следует, что стоящие в правой части выражения эквивалентны. Таким образом, существует неулучшаемая оценка для числа ортогональных функций, которая имеет вид $k \asymp m^{1/(2\beta+1)}$. Тогда

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\mathrm{L}^2}{(1+2|k|)^{2\beta}}+\frac{(1+2|k|)}{m}\max_j\sigma_j^2\right)\le$$

$$\le 2(\mathrm{L})^{2/(2\beta+1)}\left(\frac{\max_j\sigma_j^2}{m}\right)^{2\beta/(2\beta+1)}. \blacktriangleright \tag{41}$$

Доказательство следствия 6. ◄ В силу (31) и (13) из неравенства (41), поскольку его правая часть не зависит от $f(x)\in\Xi_2(\beta,\mathrm{L})$, следует утверждение следствия 6. ►

Замечание 2. *Проекционная оценка $\tilde{f}^0_{km}(x)$, описываемая (32), не является несмещенной и состоятельной, однако она является асимптотически несмещенной и асимптотически состоятельной.*

Замечание 3. *Утверждения теорем 1–5 и следствия 6 останутся справедливыми для любых квадратично интегрируемых периодических функций $f(x)$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вапник В.Н., ред. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. М., Наука, 1984.

[2] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М., Наука, 1979.

[3] Дарховский Б.С. Новый подход к стохастической задаче восстановления. *Теория вероятностей и ее применения,* 2004, т. 49, № 1, с. 36–53.
DOI: https://doi.org/10.4213/tvp235

[4] Дарховский Б.С. О стохастической задаче восстановления. *Теория вероятностей и ее применения,* 1998, т. 43, № 2, с. 357–364.
DOI: https://doi.org/10.4213/tvp1471

[5] Дарховский Б.С. Стохастическая задача восстановления функционалов. *Проблемы передачи информации,* 2008, т. 44, № 4, с. 20–32.

[6] Darkhovskiy B. Non asymptotic minimax estimation of functions with noisy observations. *Commun. Stat. Simul. Comput*., 2012, vol. 41, iss. 6, pp. 787–803.
DOI: https://doi.org/10.1080/03610918.2012.625326

[7] Стратонович Р.Л. Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика,* 1969, № 1, с. 32–46.

[8] Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., Сов. радио, 1975.

[9] Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., Наука, 1972.

[10] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М., Наука, 1979.

[11] Tsybakov A.B. Introduction to nonparametric estimation. *Springer Series in Statistics*. New York, NY, Springer, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/b13794

[12] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.

[13] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М., Наука, 1984.

[14] Ширяев А.Н. Вероятность. М., Наука, 1980.

[15] Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск, Наука, 1997.

Булгаков Станислав Александрович — ассистент департамента прикладной математики НИУ ВШЭ (Российская Федерация, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20).

Горшкова Вера Минировна — канд. техн. наук, старший научный сотрудник кафедры «Биомедицинская техника», доцент кафедры «Химия» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Хаметов Владимир Минирович — д-р физ.-мат. наук, профессор-исследователь кафедры компьютерной безопасности НИУ ВШЭ (Российская Федерация, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Булгаков С.А., Горшкова В.М., Хаметов В.М. Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 6 (93), с. 4–22.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22

STOCHASTIC RECOVERY OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTIONS

S.A. Bulgakov[1] s.a.bulgakov@gmail.com
V.M. Gorshkova[2] gvera@bmstu.ru
V.M. Khametov[1] khametovvm@mail.ru

[1] National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of the study was to solve the problem of stochastic recovery of square-integrable (with respect to the Lebesgue measure) functions defined on the real line from observations with additive white Gaussian noise, for the case of discrete time. The problem is a nonparametric, i.e., infinite-dimensional, estimation problem. The study substantiates the procedure of optimal recovery, in the mean-square sense, with respect to the product of the Lebesgue measure and the Gaussian measure, and describes an algorithm for recovering such square-integrable functions. Findings of research show that the constructed procedure for nonparametric recovery of a square-integrable function gives an unbiased and consistent recovery of an unknown function. This result has not been previously described. In addition, for smooth reconstructed functions, an almost optimal reconstruction procedure is introduced and substantiated, which gives an unimprovable (in order of magnitude) estimate of the dependence of the number of orthogonal functions on the number of observations. The error of the constructed almost optimal recovery procedure in relation to the optimal recovery procedure is no more than 50 %

Keywords

Orthogonal functions, Fourier coefficients, observation errors, projective estimator, unbiasedness, consistency

Received 14.01.2020
Accepted 26.06.2020

REFERENCES

[1] Vapnik V.N., ed. Algoritmy i programmy vosstanovleniya zavisimostey [Algorithms and programs for dependence recovery]. Moscow, Nauka Publ., 1984.

[2] Vapnik V.N. Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym [Recovery of dependences based on empirical data]. Moscow, Nauka Publ., 1979.

[3] Darkhovskii B.S. A new approach to the stochastic recovery problem. *Theory Probab. Appl.*, 2005, vol. 49, iss. 1, pp. 51–64. DOI: https://doi.org/10.1137/S0040585X97980853

[4] Darkhovskii B.S. On a stochastic renewal problem. *Theory Probab. Appl.*, 1999, vol. 43, iss. 2, pp. 282–288. DOI: https://doi.org/10.1137/S0040585X9797688X

[5] Darkhovsky B.S. Stochastic recovery problem. *Probl. Inf. Transm.*, 2008, vol. 44, no. 4, pp. 303–314. DOI: https://doi.org/10.1134/S0032946008040030

[6] Darkhovskiy B. Non asymptotic minimax estimation of functions with noisy observations. *Commun. Stat. Simul. Comput.*, 2012, vol. 41, iss. 6, pp. 787–803. DOI: https://doi.org/10.1080/03610918.2012.625326

[7] Stratonovich R.L. Efficiency of mathematical statistics methods in problems of recovery algorithm synthesis for unknown function. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1969, no. 1, pp. 32–46 (in Russ.).

[8] Tikhonov V.I., Kul'man N.K. Nelineynaya fil'tratsiya i kvazikogerentnyy priem signalov [Nonlinear filtering and quasicoherent signal receiving]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1975.

[9] Chentsov N.N. Statistical decision rules and optimal inference. AMS, 1981.

[10] Ibragimov I.A., Has'minskii R.Z. Statistical estimation. Asymptotic theory. *Applications of Mathematics* (Applied Probability Control Economics Information and Communication Modeling and Identification Numerical Techniques Optimization), vol. 16. New York, NY, Springer, 1981. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0027-2

[11] Tsybakov A.B. Introduction to nonparametric estimation. *Springer Series in Statistics*. New York, NY, Springer, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/b13794

[12] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Dover, 1957.

[13] Kashin B.S., Saakyan A.A. Ortogonal'nye ryady [Orthogonal series]. Moscow, Nauka Publ., 1984.

[14] Shiryaev A.N. Probability. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 95. New York, NY, Springer, 1996. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2539-1

[15] Borovkov A.A. Mathematical statistics. Gordon and Breach, 1998.

Bulgakov S.A. — Assistant, Applied Mathematics School, National Research University Higher School of Economics (Myasnitskaya ul. 20, Moscow, 101000 Russian Federation).

Gorshkova V.M. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Department of Biomedical Engineering, Assoc. Professor, Department of Chemistry, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Khametov V.M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Research Professor, Department of Computer Security, National Research University Higher School of Economics (Myasnitskaya ul. 20, Moscow, 101000 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Bulgakov S.A., Gorshkova V.M., Khametov V.M. Stochastic recovery of square-integrable functions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 6 (93), pp. 4–22 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22