УДК 519.234+519.254+519.7 DOI: 10.18698/1812-3368-2021-1-4-17

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.О. Багапш bagapsh@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Изучены свойства комплекснозначных функций комплексного переменного, его вещественная и мнимая части удовлетворяют кососимметрической сильно эллиптической системе второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами на плоскости. Исследовано поведение таких функций и их дилатации вблизи особых точек, установлена зависимость типа особенности от вида лорановского разложения рассматриваемой функции. Установлен принцип аргумента для изучаемых функций с полюсами, доказаны аналоги теорем Руше и Гурвица

Ключевые слова

Эллиптические системы, особые точки, принцип аргумента

Поступила 22.09.2020
Принята 02.11.2020

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект МК-1204.2020.1), Минобрнауки России (проект № 0705-2020-0047), фонда «Базис» (проект № 20-7-37-1-2)

Введение. Рассмотрим уравнение

$$af_{xx}+2bf_{xy}+cf_{yy}=0 \qquad (1)$$

относительно комплекснозначной функции f комплексного переменного $z=x+iy$ с постоянными коэффициентами $a, b, c\in\mathbb{C}$. Пусть $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$. Уравнение (1) можно записать в виде системы уравнений

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

относительно функций $u=\operatorname{Re} f$, $v=\operatorname{Im} f$ с матрицами

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & -b_2\\ b_2 & b_1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_1 & -c_2\\ c_2 & c_1\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Будем полагать, что система (2) относится к эллиптическому типу, что означает выполнение условия $A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2\neq 0$ при $\xi^2+\eta^2>0$.

Кроме того, если $\det\left(A+2\alpha B+\beta C\right)\neq 0$ при $\alpha\leq\beta^2$, то система сильно эллиптическая (см. [1–4]). Далее рассматриваем именно сильно эллиптический случай, который эквивалентен тому, что уравнение $\lambda^2+2b\lambda+c=0$ имеет два различных корня, лежащих в разных полуплоскостях относительно вещественной прямой.

С использованием линейной замены координат x, y, линейной замены искомых функций u, v и линейной комбинации уравнений системы (2) с матрицами вида (3) эту систему можно привести к уравнению $\mathcal{L}f=0$ относительно новой функции f новой комплексной координаты z с оператором

$$\mathcal{L}=\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2,\ \ \tau\in\left[0,1\right)$$

(см. [5–7]), где

$$\partial=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \overline{\partial}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

— производные Коши — Римана. Отсюда при $\tau=0$ получаем уравнение Лапласа $\Delta f=4\partial\overline{\partial}f=0$. Оператор $\mathcal{L}$ можно представить в виде $\mathcal{L}=\partial\partial_\tau$, где $\partial_\tau=\overline{\partial}+\tau\partial$, из которого видно, что $\mathcal{L}f=0$, если f имеет вид

$$f\left(z\right)=h\left(z_\tau\right)+\overline{g\left(z\right)},\tag{4}$$

где $z_\tau=z-\tau\overline{z}$; g, h — голоморфные функции своих аргументов, см., например, [7]. Кроме того, фундаментальное решение для оператора $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\Phi\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\log\left(z_\tau\overline{z}\right)$$

с главной ветвью логарифма, т. е. $\mathcal{L}\Phi\left(z\right)=\delta_0\left(z\right)$, где δ_0 — дельта-функция Дирака с центром в нуле.

С использованием фундаментального решения выводится следующее представление типа Лорана для решений рассматриваемого уравнения (см. [8] с другими обозначениями).

Теорема 1 (о лорановском разложении). *Пусть функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f\left(z\right)=0$ в кольце*

$$V=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \ r<\left|z-\alpha\right|<R\right\},\ \ \ r\geq 0,\ R\leq\infty.$$

Тогда для всех точек z из кольца

$$V'=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \ \frac{1+\tau}{1-\tau}r<\left|z-\alpha\right|<\frac{1-\tau}{1+\tau}R\right\}\subset V$$

имеет место следующее разложение лорановского типа:

$$f(z) = c\log[(z-\alpha)_\tau(\overline{z}-\overline{\alpha})] + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n(z-\alpha)_\tau^n + b_n(\overline{z}-\overline{\alpha})^n). \tag{5}$$

Здесь

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{f(\zeta)\,d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{\alpha}} + \partial f(\zeta)\log[(\zeta-\alpha)_\tau(\overline{\zeta}-\overline{\alpha})]\,d\zeta_\tau\right);$$

$$c = \frac{1}{2\pi i}\int \partial f(\zeta)\,d\zeta_\tau;\ \ b_0 = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n}\int\frac{\partial f(\zeta)\,d\zeta_\tau}{(\zeta-\alpha)_\tau^n};\ \ b_n = \frac{1}{2\pi i n}\int\left(\frac{\partial f(\zeta)\,d\zeta_\tau}{n(\overline{\zeta}-\overline{\alpha})^n} - \frac{f(\zeta)\,d\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta}-\overline{\alpha})^{n+1}}\right)$$

— *коэффициенты, вычисляемые через интегралы по окружности* $\{|\zeta-\alpha| = \rho\}$, *не зависящие от выбора радиуса* $\rho \in (r, R)$.

Как обычно, будем называть регулярной частью $\mathcal{R}(z)$ функции $f(z)$ в окрестности точки α ряд по неотрицательным степеням $(z-\alpha)_\tau$ и $(\overline{z}-\overline{\alpha})$, а главной частью $\wp(z)$ — ряд по отрицательным степеням, т. е.

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(z-\alpha)_\tau^n + b_n(\overline{z}-\overline{\alpha})^n\right),\ \ \wp(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{-n}}{(z-\alpha)_\tau^n} + \frac{b_{-n}}{(\overline{z}-\overline{\alpha})^n}\right),$$

где $b_0 = 0$. В представлении (5) аналитические компоненты h и g имеют вид

$$\begin{gathered} h(z_\tau) = c\log(z-\alpha)_\tau + \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-\alpha)_\tau^n; \\ g(z) = \overline{c}\log(z-\alpha) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{b_n}(z-\alpha)^n \end{gathered} \tag{6}$$

с выбором главной ветви логарифма, причем функция f однозначна в проколотой окрестности точки α, ввиду того, что приращение аргумента функции $z_\tau\overline{z}$ при обходе начала координат равно нулю.

Для решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ справедливы аналоги нескольких классических теорем комплексного анализа, известных для голоморфных и гармонических функций. Далее получены предварительные результаты о свойствах дилатации для изучаемых функций, установлен принцип аргумента для функций с полюсами. Этот результат обобщает соответствующие теоремы, приведенные в [9–11]. Доказаны следствия из принципа аргумента: аналоги теорем Руше и Гурвица.

Якобиан и дилатация. Якобиан отображения, задаваемого функцией f, вычисляется по формуле

$$J(z) = \left|\partial f(z)\right|^2 - \left|\overline{\partial} f(z)\right|^2 = \left|h'(z_\tau)\right|^2 - \left|\overline{g'(z)} - \tau h'(z_\tau)\right|^2 = \\ = |h'(z_\tau)|^2 \left(1 - \left|\mu(z)\right|^2\right),$$

где

$$\mu(z) = \frac{\overline{\partial} f(z)}{\partial f(z)} = \frac{\overline{g'(z)}}{h'(z_\tau)} - \tau \qquad (7)$$

— функция, называемая дилатацией.

В гармоническом случае, т. е. при $\tau = 0$, чаще используют так называемую вторую дилатацию (например, см. [12–14]) $\omega(z) = \overline{\overline{\partial} f(z)} / \partial f(z) = = g'(z) / h'(z)$, поскольку она по абсолютной величине совпадает с дилатацией μ, но при этом является мероморфной функцией во всех точках регулярности функции f в отличие от функции μ, которая может иметь неоднозначность ввиду наличия выражений вида $\overline{z}/z$. В общем случае значения τ дилатация μ имеет более простой вид, чем $\omega(z) = = \left(\overline{g'(z)} - \tau h'(z_\tau)\right) / h'(z_\tau)$, и, что более существенно, обе функции могут быть неоднозначными. В этом состоит отличие общего сильно эллиптического случая от гармонического, связанное с тем, что оператор $\mathcal{L}$ не инвариантен относительно поворота системы координат. Вместе с тем справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если главная часть лорановского разложения (5) функции f в окрестности точки α имеет конечное число слагаемых, то для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ существует предел дилатации $\lim\limits_{r \to 0} \mu\left(\alpha + re^{i\varphi_0}\right)$.*

◄ Пусть в формулах (6) будет $a_k \neq 0$, $a_n = 0$ при $n < k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — некоторое фиксированное число, и $b_m \neq 0$, $b_n = 0$ при $n < m$, где $m \in \mathbb{Z}$ — также фиксированное число. Предположим, что $k \neq 0$, $m \neq 0$ (в противном случае доказательство проводится аналогичным образом). Тогда для $z = \alpha + re^{i\varphi_0}$ имеем

$$\lim_{r \to 0} \left(\mu(z) + \tau\right) = \lim_{r \to 0} \frac{\overline{g'(z)}}{h'(z_\tau)} = \lim_{r \to 0} \frac{\dfrac{c}{\overline{z} - \overline{\alpha}} + \sum\limits_{n=m}^{\infty} n b_n \left(\overline{z} - \overline{\alpha}\right)^{n-1}}{\dfrac{c}{(z-\alpha)_\tau} + \sum\limits_{n=k}^{\infty} n a_n \left(z - \alpha\right)_\tau^{n-1}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{m b_m \left(\overline{z} - \overline{\alpha}\right)^{m-1}}{k a_k \left(z - \alpha\right)_\tau^{k-1}} = \lim_{r \to 0} r^{m-k} \frac{m b_m e^{-i(m-1)\varphi_0}}{k a_k \left(e^{i\varphi_0} - \tau e^{-i\varphi_0}\right)^{k-1}}.$$

Отсюда при $m < k$ получаем $\mu \to \infty$, при $m > k$ будет $\mu \to -\tau$ и, наконец, при $m = k$ имеем $\mu \to \frac{b_m}{a_m}\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^{1-m} - \tau$. Предложение доказано. ►

Запишем $\left|\mu(\alpha)\right| < 1$, если для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство $\lim\limits_{r \to 0} \mu\left(\alpha + re^{i\varphi_0}\right) < 1$, и аналогично для $\left|\mu(\alpha)\right| > 1$. Если $\left|\mu(\alpha)\right| < 1$, то будем говорить, что функция f сохраняет ориентацию в точке α, а если $\left|\mu(\alpha)\right| > 1$, то меняет ориентацию.

Отметим, что если $\left|h'(z_\tau)\right| < \infty$ и $\left|\mu(z)\right| = 1$, то якобиан $J(z)$ обращается в нуль.

Особые точки. Пусть функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в проколотой окрестности точки α. Введем обозначение $\operatorname{ind}_\alpha f(z) = (2\pi)^{-1} \Delta_C \arg f(z)$ для деленного на 2π приращения аргумента функции f вдоль произвольной окружности $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = r\}$ с достаточно малым радиусом r, лежащей в области регулярности функции f. Эта величина совпадает с индексом образа окружности C при отображении f относительно точки α и не зависит от выбора окружности (доказательство последнего факта аналогично гармоническому случаю, см. [10, лемма 2.1]).

Определение 1. *Пусть функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в окрестности точки α, причем $f(\alpha) = 0$. Если f сохраняет ориентацию в точке α, то эта точка называется нулем f порядка $\operatorname{ind}_\alpha f(z)$, а если меняет ориентацию, то нулем порядка $-\operatorname{ind}_\alpha f(z)$.*

Определение 2. *Пусть функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в окрестности точки α, причем $\lim\limits_{z \to \alpha} \left|f(z)\right| = \infty$. Если f сохраняет ориентацию в точке α, то эта точка называется полюсом f порядка $-\operatorname{ind}_\alpha f(z)$, а если меняет ориентацию, то полюсом порядка $\operatorname{ind}_\alpha f(z)$.*

Полином p относительно переменных x, y называется $\mathcal{L}$-полиномом, если $\mathcal{L}p = 0$ в $\mathbb{C}$. Любой $\mathcal{L}$-полином является суммой полиномов относительно переменных $\overline{z} = x - iy$ и $z_\tau = z - \tau\overline{z}$. Для изучения особых точек решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ сначала рассмотрим однородные $\mathcal{L}$-полиномы. Понадобится следующее утверждение из [11, лемма 1].

Лемма 1. *Однородный $\mathcal{L}$-полином* $p(z) = az_\tau^n + b\overline{z}^n$, $n > 0$, $a, b \neq 0$, *при* $\tau \neq 0, \pm 1$ *имеет неизолированные нули тогда и только тогда, когда* $b / a = -(e^{2i\varphi_0} - \tau)^n$ *при некотором* $\varphi_0 \in [0, \pi)$. *Если* $\varphi_0 = 0$, *то* $p(z)$ *обращается в нуль на вещественной прямой, при остальных значениях* $\varphi_0 \in (0, \pi)$ *— на паре прямых, симметричных относительно вещественной оси, одна из которых наклонена к ее положительному направлению под углом* φ_0.

Отметим, что в гармоническом случае, отвечающем значению $\tau = 0$, полином p обращается в нуль неизолированно на n прямых, делящих угол 2π на равные углы.

Лемма 2. *Точка* $z = 0$ *является при* $\tau \neq \pm 1$ *для функции* $q(z) = az_\tau^{-n} + b\overline{z}^{-n}$, $n > 0$, $a, b \neq 0$, *существенно особой, если* $a / b = -\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n$ *при некотором* $\varphi_0 \in [0, \pi)$, *и полюсом в противном случае. Если она существенно особая, то множество пределов при* $z \to 0$ *представляет собой прямую, проходящую через начало координат под углом*

$$\psi = \arg b + \frac{\pi}{2} + (n-2)\varphi_0 - \operatorname{arctg} \frac{\tau \sin 2\varphi_0}{1 - \tau \cos 2\varphi_0} \tag{8}$$

к положительному направлению вещественной оси.

◂ Введем полярные координаты, приняв $z = re^{i\varphi}$, и представим функцию $q(z)$ в виде

$$q(z) = \frac{a\overline{z}^n + bz_\tau^n}{(z_\tau \overline{z})^n} = \frac{ae^{-in\varphi} + b\left(e^{i\varphi} - \tau e^{-i\varphi}\right)^n}{r^n \left(e^{i\varphi} - \tau e^{-i\varphi}\right)^n e^{-in\varphi}} = \frac{a + b\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^n}{r^n \left(e^{i\varphi} - \tau e^{-i\varphi}\right)^n}.$$

Отсюда при $z \to 0$ по некоторой последовательности точек предел $q(z)$ может быть конечным, если коэффициенты a и b такие, что найдется угол $\varphi = \varphi_0 \in [0, \pi)$, при котором $a / b = -\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n$, что обращает числитель в нуль. В этом случае можно записать

$$q(z) = \frac{b\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^n - \left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n}{r^n \left(e^{i\varphi} - \tau e^{-i\varphi}\right)^n} =$$

$$= \frac{b}{\left(e^{i\varphi} - \tau e^{-i\varphi}\right)^n} \frac{2\sin(\varphi - \varphi_0)}{r^n} \frac{\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^n - \left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n}{2\sin(\varphi - \varphi_0)},$$

причем последняя дробь при $\varphi \to \varphi_0$ стремится к $in\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^{n-1}$. Следовательно, конечные пределы при $z \to 0$ возникают тогда и только тогда, когда $r \to 0$ и $\varphi \to \varphi_0$, причем $2\sin\left(\varphi - \varphi_0\right) r^{-n} \to \kappa \in \mathbb{R}$. Такое стремление точки z к нулю возможно для любого вещественного числа κ, например, вдоль кривой, определяемой уравнением в полярных координатах $\kappa r^n = 2\sin\left(\varphi - \varphi_0\right)$. При этом множество пределов

$$\lim_{z \to 0} q\left(z\right) = \frac{ibne^{i(n-2)\varphi_0}}{1 - \tau e^{-2i\varphi_0}} \kappa, \quad \kappa \in \left(-\infty, \infty\right),$$

представляет собой прямую, проходящую через начало координат под углом ψ, определяемым по (8). ►

Предложение 2. *Пусть лорановское разложение (7) функции f в окрестности точки α содержит только регулярную часть, начинающуюся со степени $n > 0$, т. е. $c = 0$, $a_k = b_k = 0$ при $0 \le k \le n-1$ и $\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2 \ne 0$. Тогда если $\mu\left(\alpha\right) \ne 1$, то точка α — изолированный нуль функции f порядка n при $\left|\mu\left(\alpha\right)\right| < 1$ и порядка −n при $\left|\mu\left(\alpha\right)\right| > 1$.*

◄ Без ограничения общности можно полагать, что $\alpha = 0$. Кроме того, предположим, что $a_n \ne 0$ (при $a_n = 0$ рассуждения принципиально не отличаются), и разберем случай, когда $\left|\mu\left(\alpha\right)\right| < 1$ (при $\left|\mu\left(\alpha\right)\right| > 1$ доказательство аналогично).

Лорановское разложение функции *f* в окрестности точки $\alpha = 0$ имеет вид

$$f\left(z\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k z_\tau^k + b_k \overline{z}^k\right), \; n > 0. \tag{9}$$

Предположим, что 0 — неизолированный нуль для однородного полинома $p_n\left(z\right) = a_n z_\tau^n + b_n \overline{z}^n$. Тогда, согласно лемме 1, имеем $b_n / a_n = -\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n$ при некотором угле φ_0. Следовательно, обозначая $z = re^{i\varphi}$, для дилатации функции f при $r \to 0$, согласно (7), получаем

$$\mu\left(z\right) = \frac{nb_n \overline{z}^{n-1} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} kb_k \overline{z}^{k-1}}{na_n z_\tau^{n-1} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} ka_k z_\tau^{k-1}} - \tau = \frac{b_n \overline{z}^{n-1}}{a_n z_\tau^{n-1}} - \tau + o\left(1\right) =$$

$$= -\frac{\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^n}{\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^{n-1}} - \tau + o\left(1\right).$$

Отсюда находим, что предел $\lim\limits_{r\to 0}\mu\left(re^{i\varphi_0}\right)=-e^{2i\varphi_0}$ равен по модулю единице, а это противоречит условию теоремы и доказывает, что 0 — изолированный нуль для p_n. Однако тогда из (9) вытекает, что $f(z)=p_n(z)(1+o(1))$ при $z\to 0,$ откуда следует, что, во-первых, и для f точка 0 тоже изолированный нуль, а во-вторых, $\operatorname{ind}_0 f(z)=\operatorname{ind}_0 p_n(z).$

Обозначим $\lambda=b_n/a_n$ и запишем условие сохранения ориентации:

$$|\mu(z)|=\left|\frac{\lambda}{\left(e^{2i\varphi}-\tau\right)^{n-1}}-\tau+o(1)\right|<1.$$

Из него следует, что

$$\frac{\lambda}{\left(e^{2i\varphi}-\tau\right)^{n-1}}-\tau+o(1)=\rho e^{2i\theta},$$

где $\rho,\ \theta$ — числа, зависящие от r и $\varphi,$ причем $0\le\rho<1.$ Здесь выразим

$$\lambda=(e^{2i\varphi}-\tau)^{n-1}\left(\tau+\rho e^{2i\theta}\right)+o(1)$$

и получим

$$p_n(z)=a_n\left(z_\tau^n+\lambda\overline{z}^n\right)=a_n r^n e^{-in\varphi}\left(\left(e^{2i\varphi}-\tau\right)^n+\lambda\right)=$$
$$=a_n r^n e^{-in\varphi}\left(e^{2i\varphi}-\tau\right)^{n-1}\left(e^{2i\varphi}+\rho e^{2i\theta}+o(1)\right).$$

Отсюда ввиду того, что $\rho<1,$ находим $\operatorname{ind}_0 f(z)=\operatorname{ind}_0 p_n(z)=$ $=-n+2(n-1)+2=n.$ ►

Предложение 3. *Пусть главная часть лорановского разложения (5) функции f в окрестности точки α содержит конечное число $n>0$ слагаемых, т. е. $a_{-k}=b_{-k}=0$ при $1\le k\le n-1$ и $\left|a_{-n}\right|^2+\left|b_{-n}\right|^2\ne 0.$ Тогда если $|\mu(\alpha)|\ne 1$, то точка α — полюс функции f порядка n при $|\mu(\alpha)|<1$ и порядка $-n$ при $|\mu(\alpha)|>1.$*

◄ Лорановское разложение функции f в проколотой окрестности точки $\alpha=0$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{-k}}{z_\tau^k}+\frac{b_{-k}}{\overline{z}^k}\right)+c\log\left(z_\tau\overline{z}\right)+\mathcal{R}(z). \qquad (10)$$

Предположим, что 0 — существенно особая точка для функции $q_n(z)=$ $=a_{-n}z_\tau^{-n}+b_{-n}\overline{z}^{-n}.$ Тогда, согласно лемме 2, имеем $a_{-n}/b_{-n}=-\left(e^{2i\varphi_0}-\tau\right)^n$

при некотором угле φ_0. Следовательно, обозначая $z = re^{i\varphi}$, для дилатации функции *f* получаем выражение

$$\mu(z) = \frac{-\dfrac{nb_{-n}}{\overline{z}^{n+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{kb_{-k}}{\overline{z}^{k+1}} + c\left(\dfrac{1}{\overline{z}} - \dfrac{\tau}{z_\tau}\right) + \partial_\tau \mathcal{R}(z)}{-\dfrac{na_{-n}}{z_\tau^{n+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{ka_{-k}}{z_\tau^{k+1}} + \dfrac{c}{z_\tau} + \partial \mathcal{R}(z)} - \tau =$$

$$= \frac{b_{-n} z_\tau^{n+1}}{a_{-n} \overline{z}^{n+1}} - \tau + o(1) = -\frac{\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^{n+1}}{\left(e^{2i\varphi_0} - \tau\right)^{n}} - \tau + o(1).$$

Отсюда находим $\lim\limits_{r \to 0} \mu\left(re^{i\varphi_0}\right) = -e^{i\varphi_0}$, а это противоречит условию $\left|\mu(0)\right| \neq 1$ и доказывает, что 0 — полюс функции q_n. Тогда (10) можно переписать в виде $f(z) = q_n(z)\left(1 + o(1)\right)$ при $z \to 0$, откуда следует, что 0 является полюсом для f и, кроме того, $\operatorname{ind}_0 f(z) = \operatorname{ind}_0 p_n(z)$. Обозначим $\lambda = b_{-n} / a_{-n}$ и запишем условие сохранения ориентации

$$\left|\mu(z)\right| = \left|\lambda(e^{2i\varphi} - \tau)^{n+1} - \tau + o(1)\right| < 1.$$

Отсюда

$$\lambda(e^{2i\varphi} - \tau)^{n+1} = \tau + \rho e^{2i\theta} + o(1),$$

где ρ, θ — числа, зависящие от r и φ, причем $0 \leq \rho < 1$. Выразим

$$\lambda = \frac{\tau + \rho e^{2i\theta}}{(e^{2i\varphi} - \tau)^{n+1}} + o(1)$$

и получим

$$q_n(z) = \frac{a_{-n}}{\overline{z}^n}\left(\frac{\overline{z}^n}{z_\tau^n} + \lambda\right) = a_{-n} r^{-n} e^{in\varphi}\left(\frac{1}{\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^n} + \frac{\tau + \rho e^{2i\theta}}{\left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^{n+1}} + o(1)\right) =$$

$$= \frac{a_{-n} e^{in\varphi}\left(e^{2i\varphi} + \rho e^{2i\theta} + o(1)\right)}{r^n \left(e^{2i\varphi} - \tau\right)^{n+1}},$$

откуда ввиду того, что $\rho < 1$, находим

$$\operatorname{ind}_0 f(z) = \operatorname{ind}_0 q_n(z) = n - 2(n+1) + 2 = -n. \ ►$$

Пример 1. Найдем порядок полюса $z = 0$ функции $f(z) = \log(z_\tau \overline{z})$ при $\tau \in [0,1)$. Используя полярные координаты $z = re^{i\varphi}$, запишем

$$f\left(re^{i\varphi}\right) = 2\log r + \log\left(1 - \tau e^{-2i\varphi}\right).$$

Найдем число оборотов вокруг начала координат, осуществляемых точкой $w=\log\left(1-\tau e^{-2i\varphi}\right)$, где $\theta=2\varphi$, при $r=\text{const}$ и θ, изменяющемся от 0 до 4π. Выделим вещественную и мнимую части числа w:

$$u=2\log r+\frac{1}{2}\log\left(1-2\tau\cos\theta+\tau^2\right),\ v=\operatorname{arctg}\frac{\tau\sin\theta}{1-\tau\cos\theta}.$$

Отсюда находим, что $u(0)=\log\left[(1-\tau)r^2\right]$, $v(0)=0$ и $u(\pi)=$ $=\log\left[(1+\tau)r^2\right]$, $v(\pi)=0$. Кроме того, при $\theta\in(0,\pi)$ имеем $v>0$. Поскольку $u(\pi+\theta)=u(\pi-\theta)$, $v(\pi+\theta)=-v(\pi-\theta)$, дуга, отвечающая значениям $\theta\in(\pi,2\pi)$, симметрична дуге, отвечающей значениям $\theta\in(0,\pi)$, относительно вещественной оси. При достаточно малых значениях r кривая, являющаяся образом окружности $r=\text{const}$, полностью лежит в левой полуплоскости $u<0$ так, что число оборотов вокруг начала координат равно нулю. Отметим, что в отличие от гармонического случая $(\tau=0)$ при $r>1/\sqrt{1+\tau}$ получаем два оборота по ходу часовой стрелки. Таким образом, $\operatorname{ind}_0\log\left(z_\tau\overline{z}\right)=0$, т. е. рассматриваемая функция имеет в точке 0 полюс нулевого порядка, который естественно называть (как в гармоническом случае) логарифмическим.

Принцип аргумента и его следствия. Теорема 4 (принцип аргумента). *Пусть функция f удовлетворяет в односвязной жордановой области Ω уравнению $\mathcal{L}f=0$ всюду, кроме конечного числа полюсов, и при этом не имеет нулей α, в которых $\left|\mu(\alpha)\right|=1$ в смысле предела хотя бы по одному отрезку. Предположим, что f также не имеет нулей и полюсов на замкнутой жордановой кривой $\Gamma\subset\Omega$. Тогда $\Delta_\Gamma\arg f(z)=2\pi(N-P)$, где N — суммарный порядок нулей, а P — полюсов, лежащих в области, ограниченной кривой Γ.*

◄ Утверждение теоремы доказывается применением предложений 2 и 3. ►

Теорема 5 (аналог теоремы Руше). *Пусть функции f и f_0 удовлетворяют уравнениям $\mathcal{L}f=0$ и $\mathcal{L}f_0=0$ в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ и сохраняют ориентацию, а область $D\subset\Omega$ ограничена кусочно-гладкой кривой ∂D. Тогда если $\left|f(z)\right|>\left|f_0(z)\right|$ при всех $z\in\partial D$, то функции f и $f+f_0$ имеют одинаковое число нулей в D.*

◄ Поскольку у функций f и f_0 нет особых точек в Ω и $f+f_0\neq 0$ на ∂D, согласно установленному в теореме 4 принципу аргумента, число нулей функции $f+f_0$ в D равно

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg\left(f + f_0\right) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg\left[f\left(1+\frac{f_0}{f}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f,$$

поскольку $|f_0| < |f|$ на ∂D. Однако $(2\pi)^{-1}\Delta_{\partial D}\arg f$ в силу той же теоремы 4, есть число нулей функции f в D. Теорема доказана. ►

Теорема 6 (аналог теоремы Гурвица). *Пусть последовательность функций* f_n, *удовлетворяющих уравнению* $\mathcal{L}f_n = 0$ *в области* D *и сохраняющих ориентацию в ней, сходится локально равномерно в* D *к функции* $f \neq \mathrm{const}$. *Если точка* $\alpha \in D$ *является нулем функции* f, *то в любом круге* $\{|z-\alpha| < r\} \subset D$ *все функции* f_n, *начиная с некоторого номера* n, *также имеют нуль.*

◄ Отметим, что в силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ равномерный предел f последовательности функций f_n, являющихся решениями уравнения $\mathcal{L}f_n = 0$, есть также решение уравнения $\mathcal{L}f = 0$. Дальнейший ход доказательства воспроизводит рассуждения из классической теоремы Гурвица для голоморфного случая (см. [15]), причем используется доказанный в теореме 5 аналог теоремы Руше. ►

Следствие 1. *Если последовательность функций* f_n, *удовлетворяющих уравнению* $\mathcal{L}f_n = 0$ *в области* D *и однолистных в ней, сходится локально равномерно в* D *к функции* $f \neq \mathrm{const}$, *то* f *однолистна в* D.

Заключение. Для решений кососимметричных сильно эллиптических систем второго порядка на плоскости, имеющих полюсы, установлена справедливость принципа аргумента и вытекающих из него аналогов теорем Руше и Гурвица.

Благодарности

Автор благодарит д-ра физ.-мат. наук, профессора К.Ю. Федоровского за сделанные ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Somigliana C. Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali. *Annali di Matematica*, 1894, vol. 22, no. 1, pp. 143–156.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02353934

[2] Петровский И.Г. Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными. *Матем. сб.,* 1939, т. 5, с. 3–70.

[3] Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. *Матем. сб.,* 1951, т. 29, № 3, с. 615–676.

[4] Hua L.-K., Lin W., Wu C.-Q. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations. *Acta Math. Sinica*, 1965, vol. 15, no. 2, pp. 174–187.

[5] Hua L.-K., Lin W., Wu C.-Q. Second-order systems of partial differential equations in the plane. Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[6] Verchota G.C., Vogel A.L. Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 1997, vol. 349, no. 11, pp. 4501–4535.

[7] Багапш А.О., Федоровский К.Ю. C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в R^2. *Тр. МИАН*, 2017, т. 298, с. 42–57. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968517030037

[8] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в R^2 решениями эллиптических уравнений второго порядка. *Матем. сб.,* 1999, т. 190, № 2, с. 123–144.
DOI: https://doi.org/10.4213/sm386

[9] Duren P., Hengartner W., Laugesen R.S. The argument principle for harmonic functions. *Amer. Math. Monthly,* 1996, vol. 103, no. 5, pp. 411–415.
DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2974933

[10] Suffridge T.J., Thompson J.W. Local behavior of harmonic mappings. *Complex Variables Theory Appl.*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 63–80.
DOI: https://doi.org/10.1080/17476930008815237

[11] Зайцев А.Б. Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка. *Матем. заметки*, 2014, т. 95, вып. 5, с. 718–733.
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10225

[12] Hengartner W., Schober G. Univalent harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 1987, vol. 299, no. 1, pp. 1–31.

[13] Duren P. Harmonic mappings in the plane. Cambridge Univ. Press, 2004.

[14] Зайцев А.Б. О взаимной однозначности решений эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге на плоскости. *Зап. науч. сем. ПОМИ,* 2015, т. 434, с. 91–100.

[15] Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. М., МИАН, 2004.

Багапш Астамур Олегович — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); младший научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН (Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Багапш А.О. Некоторые аналитические и геометрические свойства решений кососимметрических эллиптических систем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 1 (94), с. 4–17.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-4-17

SOME ANALYTIC AND GEOMETRIC PROPERTIES OF SOLUTION TO SKEW-SYMMETRIC ELLIPTIC SYSTEMS

A.O. Bagapsh bagapsh@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
FRC Informatics and Management, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract

We study the properties of complex-valued functions of a complex variable, whose real and imaginary parts satisfy a second-order skew-symmetric strongly elliptic system with constant real coefficients in the plane. The behavior of such functions and their dilatations near singular points is investigated and the dependence of the type of the singularity on the form of the Laurent expansion of the function under consideration is established. The principle of the argument is established for the functions with poles under study, analogs of the Ruschet and Hurwitz theorems are proved

Keywords

Elliptic systems, singular points, argument principle

Received 22.09.2020
Accepted 02.11.2020

This work was supported by the Russian Federation Presidential Council for Grants (project no. MK-1204.2020.1), and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 0705-2020-0047), and the found "Basis" (project no. 20-7-37-1-2)

REFERENCES

[1] Somigliana C. Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali. *Annali di Matematica*, 1894, vol. 22, no. 1, pp. 143–156.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02353934

[2] Petrovskiy I.G. On solution analyticity of partial equation system. *Matem. sb.*, 1939, vol. 5, pp. 3–70 (in Russ.).

[3] Vishik M.I. On strongly elliptic systems of differential equations. *Matem. sb.*, 1951, vol. 29, no. 3, pp. 615–676 (in Russ.).

[4] Hua L.-K., Lin W., Wu C.-Q. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations. *Acta Math. Sinica*, 1965, vol. 15, no. 2, pp. 174–187.

[5] Hua L.-K., Lin W., Wu C.-Q. Second-order systems of partial differential equations in the plane. Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[6] Verchota G.C., Vogel A.L. Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, vol. 349, no. 11, pp. 4501–4535.

[7] Bagapsh A.O., Fedorovskiy K.Yu. C^1 approximation of functions by solutions of second-order elliptic systems on compact sets in $\mathbb{R}^2$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 298, no. 1, pp. 35–50. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543817060037

[8] Paramonov P.V., Fedorovskii K.Yu. Uniform and C^1-approximability of functions on compact subsets of R^2 by solutions of second-order elliptic equations. *Sb. Math.*, 1999, vol. 190, no. 2, pp. 285–307.
DOI: https://doi.org/10.1070/SM1999v190n02ABEH000386

[9] Duren P., Hengartner W., Laugesen R.S. The argument principle for harmonic functions. *Amer. Math. Monthly*, 1996, vol. 103, no. 5, pp. 411–415.
DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2974933

[10] Suffridge T.J., Thompson J.W. Local behavior of harmonic mappings. *Complex Variables Theory Appl.,* 2000, vol. 41, no. 1, pp. 63–80.
DOI: https://doi.org/10.1080/17476930008815237

[11] Zaitsev A.B. Mappings by the solutions of second-order elliptic equations. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 642–655.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434614050083

[12] Hengartner W., Schober G. Univalent harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1987, vol. 299, no. 1, pp. 1–31.

[13] Duren P. Harmonic mappings in the plane. Cambridge Univ. Press, 2004.

[14] Zaitsev A.B. On univalence of solutions of second-order elliptic equations in the unit disk on the plane. *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 215, no. 5, pp. 601–607.
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-016-2866-2

[15] Domrin A.V., Sergeev A.G. Lektsii po kompleksnomu analizu [Lectures on complex analysis]. Moscow, MIAN Publ., 2004.

Bagapsh A.O. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Junior Research Fellow, FRC Informatics and Management, Russian Academy of Sciences (Vavilova ul. 44, korp. 2, Moscow, 119333 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Bagapsh A.O. Some analytic and geometric properties of solution to skew-symmetric elliptic systems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 1 (94), pp. 4–17 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-4-17