УДК 539.375 DOI: 10.18698/1812-3368-2021-1-57-72

ТЕОРИЯ УЗКИХ U-ОБРАЗНЫХ ВЫРЕЗОВ В ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Ю.Н. Овчаренко ovcharenkos@rambler.ru

ТулГУ, Тула, Российская Федерация

Аннотация

На основе линейной механики разрушения получен полный набор асимптотических формул для описания напряженно-деформированного состояния у вершины узкого U-образного выреза. Такой вид дефекта способна иметь трещина, которая подверглась коррозионному воздействию среды, или трещиноподобный дефект в сварном соединении (непровар, подрез), узкая прорезь в детали. Для сравнительной оценки опасности трещинообразования в вершинах узких U-образных вырезов, а также для выявления мест и направления инициации разрушения показана возможность использования таких энергетических критериев, как плотность энергии деформации W_σ и W_τ. Ранее указанные критерии были предложены автором настоящей работы для классических трещин-разрезов. Здесь на основе сингулярных решений линейной механики разрушения проведено исследование напряженно-деформированного состояния в терминах W_σ и W_τ около вершин предельно узких U-образных вырезов (*blunt cracks*) в сравнении с классическими трещинами-разрезами

Ключевые слова

Линейная механика разрушения, узкий U-образный вырез, плотность энергии деформации, mode I, mode II

Поступила 29.03.2019
Принята 08.10.2020

Введение. В настоящее время существует значительное число как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных изучению напряженно-деформированного состояния тел с U-образными вырезами с большими или малыми радиусами ρ у вершины. Проведем краткий обзор по рассматриваемой тематике.

Современной технике требуется максимальное уменьшение веса конструкций и сооружений. Возможность осуществления этого требования тесно связана с точным знанием действительного распределения напряжений в частях конструкций и сооружений. Без этого надежный расчет на прочность невозможен. Однако точное определение напряжений в телах сложной формы является весьма трудной задачей. Как правило, она решается экспериментально и в основном на соответствующих моделях тел. Естественно, что такой путь решения задачи не обладает общностью. Поэтому необходимо развитие теоретических способов определения напряжений в телах сложной формы. Такая попытка сделана Г. Нейбером в работе [1] (1947), где содержится значительное число результатов, относящихся к решению плоских и пространственных задач теории упругости о распределении напряжений в местах резкого изменения геометрической формы нагруженной детали.

Задачи, связанные с определением напряженного состояния изотропных пластин, ослабленных отверстиями, при действии различных нагрузок описаны в [2], там же подробно изложены различные методы решения указанных задач. Приведены графики и таблицы, наглядно показывающие закономерности в напряженном состоянии многосвязных пластин. Изложены методы решения термоупругих, упругопластических и обратных задач теории упругости, определена концентрация напряжений в пластинах с вырезами и выступами.

Обширные сведения о коэффициентах концентрации напряжений в наиболее характерных элементах конструкций, широко распространенных в различных отраслях машиностроения (в ракетно-космической технике, авиа-, судо- и станкостроении и др.), приведены в [3]. Основную часть работы занимают графики, характеризующие зависимость коэффициентов концентрации напряжений в различных конструктивных элементах от геометрических параметров и значительно облегчающие проведение расчетов. Главное достоинство работы — ее практическая направленность.

Общий подход к решению задач о распределении напряжений в деталях машин изложен в [4]. Рассмотрены различные классы расчетных моделей деталей, показаны возможности использования интегральных оценок распределения напряжений при проектировании деталей. Рассмотрены задачи о распределении напряжений и деформаций в деталях машин в условиях упругости, пластичности и ползучести.

Функциональные возможности программы «КоКон», технология ее использования и рекомендация по применению описаны в [5]. Программа предназначена для специалистов-проектировщиков, обладающих минимальными навыками работы с компьютером.

Решение задачи о напряжениях в упругой пластине с эллиптическим отверстием, подкрепленным перемычкой, перманентно разрушающейся при росте нагрузки на краях пластины, получено в [6].

Задача об одноосном растяжении бесконечной пластины с эллиптическим отверстием в рамках линейной теории упругости рассмотрена в [7]. Предложен вариант асимптотической формулы для напряжений.

Модели и критерии механики разрушения тел с трещинами для анализа деформирования и разрушения тел с вырезами и надрезами рассмотрены в [8]. Приведены критериальные уравнения и соответствующие диаграммы трещиностойкости тел с вырезами, учитывающие изменение степени стеснения деформаций у вершины выреза в результате конечности радиуса скругления его вершины и несингулярной составляющей напряжений (*T*-напряжений). Представлены аналитические соотношения для расчета *J*-интеграла в случае тел с тупыми U- и острыми V-образными вырезами и надрезами при упругом и упругопластическом нагружении. Представлены возможности метода сепарабельных функций для экспериментального исследования упругопластической трещиностойкости нестандартных образцов с надрезами.

Выражения для напряженного состояния у вершины узкого U-образного выреза аналитически получены в [9] для схем нагружения *mode* I, *mode* II и *mode* III в линейной механике разрушения:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}-\frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}; \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}-\frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}; \tag{2}$$

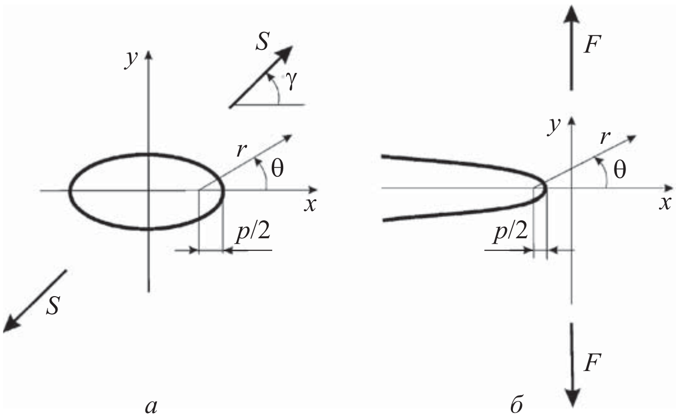
$$\begin{bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{bmatrix}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Выражения (1)–(3) при $\rho=0$ представляют собой формулы для трещин Вестергарда — Ирвина. Эти формулы могут быть применимы, когда *a priori* известны коэффициенты интенсивности напряжений K_{I}, K_{II} и K_{III}

для того же тела с виртуальной трещиной, которая аналогична узкому U-образному вырезу по плоскостному расположению и размеру.

В схеме нагружения *mode* III при наличии достаточно малого радиуса ρ формула (3) совпадает с аналогичной формулой для острых трещин-разрезов, т. е. наличие незначительного радиуса ρ у вершины узкого U-образного выреза никак не влияет на напряженное состояние в рамках рассматриваемой концепции (радиус ρ достаточно мал). В связи с этим далее не предполагается никакой речи о схеме нагружения *mode* III с присутствующим малым радиусом ρ.

Схемы узких U-образных вырезов приведены на рисунке. Узкий U-образный вырез в теоретическом плане интересен тем, что в некоторых случаях вершина реальной трещины затупляется пластически до некоторого радиуса кривизны ρ прежде, чем начнется разрушение. По возможности, это следует учитывать. При хрупком разрушении, когда у вершины трещины предполагается существование весьма малой зоны предразрушения радиусом ρ, в силу сингулярности напряжений материал в этой зоне нельзя рассматривать как сплошную среду.



Схемы узких эллиптического отверстия (*а*) и гиперболического выреза (*б*) [9]

Начало полярной системы координат (см. рисунок) располагается на расстоянии $\rho/2$ от дна выреза. Указанное расположение этой системы позволило в [9] получить асимптотические формулы (1)–(3) для напряжений (в индивидуальной декартовой системе координат, начало которой совпадает с началом полярной системы).

Для получения формул (1) и (2) автор работы [9] использовал комплексные функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ для эллиптических отверстий, а также комплексные функции $\varphi'(z)$ и $\chi'(z)$ для гиперболических вырезов, взятые из [10]. Для эллиптического отверстия:

$$
\begin{aligned}
4\varphi(z) &= Sc\left[e^{2\xi_0}\cos 2\gamma\,\mathrm{ch}\,\zeta + \left(1 - e^{2\xi_0 + 2i\gamma}\right)\mathrm{sh}\,\zeta\right];\\
4\chi(z) &= -Sc^2\left[\left(\mathrm{ch}\,2\xi_0 - \cos 2\gamma\right)\zeta + \frac{1}{2}e^{2\xi_0}\,\mathrm{ch}\,2\left(\zeta - \xi_0 - i\gamma\right)\right],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где S — внешняя нагрузка, приложенная под углом γ (см. рисунок *а*); c, ξ_0 — параметры эллиптического отверстия; $\zeta = \xi + i\eta$, ξ, η — эллиптические координаты.

Для гиперболического выреза (после некоторых преобразований):

$$
\varphi'(z) = \frac{iF}{2\left(\pi - 2\eta_0 + \sin 2\eta_0\right)c\,\mathrm{sh}\,\zeta};
$$

$$
\chi'(z) = \frac{iF\left[\zeta + \left(1 - 2\cos^2\eta_0\right)\mathrm{cth}\,\zeta\right]}{2\left(\pi - 2\eta_0 + \sin 2\eta_0\right)}.
$$

Здесь F — внешняя нагрузка параллельно вертикальной оси y (см. рисунок *б*); c, η_0 — параметры гиперболического выреза.

Автор работы [9] рассматривал предельно узкие вырезы: эллиптическое отверстие и гиперболический вырез $(\rho \to 0)$. В связи с этим при рассмотрении приведенных выше комплексных функций он осуществлял предельные переходы с отбрасыванием членов высокой степени малости. Получен тождественный результат для эллиптического отверстия и гиперболического выреза [13, 14]:

для *mode* I

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}z^{1/2};\\
\psi(z) &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}z^{1/2} - \rho z^{-1/2}\right),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

для *mode* II

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= -i\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}z^{1/2};\\
\psi(z) &= i\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3}{2}z^{1/2} + \rho z^{-1/2}\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Из (5) и (6) следуют формулы (1) и (2), которые автор работы [9] и другие авторы использовали для прочностных исследований *blunt cracks* [11, 12].

Теоретический анализ. Далее с использованием сингулярных решений линейной механики разрушения выполнено исследование напряженно-деформированного состояния около вершины предельно узкого U-образного выреза в упругой постановке.

Использование (5) и (6) позволяет добавить к (1) и (2) формулы для перемещений u и v с помощью комплексных выражений Колосова [10] (для декартовой системы координат):

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar{z})\right];$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right];$$
$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(\bar{z}) - \overline{\psi}'(\bar{z}).$$

Отсюда для схемы нагружения *mode* I выражения для перемещений имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2\mu u \\ 2\mu v \end{bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \begin{bmatrix} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{\rho}{r}\cos\frac{\theta}{2} \\ \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{\rho}{r}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

для *mode* II —

$$\begin{bmatrix} 2\mu u \\ 2\mu v \end{bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \begin{bmatrix} \left(\kappa + \frac{3}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{\rho}{r}\sin\frac{\theta}{2} \\ \left(-\kappa + \frac{3}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{\rho}{r}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Здесь μ — модуль сдвига; κ — параметр, который находится по формуле $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для задачи о плоском напряженном состоянии и по формуле $\kappa = (3 - 4\nu)$ для задачи о плоской деформации, ν — коэффициент Пуассона. Таким образом, завершен полный набор асимптотических формул для описания напряженно-деформированного состояния у вершины узкого U-образного выреза (в декартовой системе координат).

Выпишем комплексные выражения Колосова [10] (для полярной системы координат), которые понадобятся далее:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar{z})\right];$$
$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right]; \qquad (7)$$
$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{i\theta}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(z) - \overline{\psi}'(\bar{z})\right].$$

Используя (7), формулы для напряжений и перемещений в полярной системе координат для суммы схем нагружения *mode* I и *mode* II можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{\rho}{r}\cos\frac{3\theta}{2}\\ \frac{1}{2}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{\rho}{r}\cos\frac{3\theta}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{\rho}{r}\sin\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(-5\sin\frac{\theta}{2}+3\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{\rho}{r}\sin\frac{3\theta}{2}\\ -\frac{3}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{\rho}{r}\sin\frac{3\theta}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{\rho}{r}\cos\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}; \qquad (8)$$

$$\begin{bmatrix}2\mu u_r\\ 2\mu u_\theta\end{bmatrix}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}r^{1/2}\begin{bmatrix}(\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{\rho}{r}\cos\frac{\theta}{2}\\ -\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2}-\frac{\rho}{r}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}r^{1/2}\begin{bmatrix}-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2}+\frac{\rho}{r}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{\rho}{r}\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Представим (8) и (9) в более простом и удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}A_1\\ B_1\\ D_1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}r^{-1/2}\begin{bmatrix}A_2\\ B_2\\ D_2\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}2\mu u_r\\ 2\mu u_\theta\end{bmatrix}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}r^{1/2}\begin{bmatrix}E_1\\ F_1\end{bmatrix}+\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}r^{1/2}\begin{bmatrix}E_2\\ F_2\end{bmatrix},$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ — переменные параметры, которые определяются сравнением последних формул с формулами (8) и (9).

Плотность энергии деформации. Наличие радиуса ρ у вершины выреза (хотя и очень малого) с позиции теории упругости вносит существенное изменение в напряженно-деформированное состояние. В этом случае по сравнению с абсолютно острой трещиной сингулярность напряжений пропадает. Напряжения становятся конечными, причем с другими законами развития. Следовательно, применять напрямую коэффициенты интенсивности напряжений K_{I} и K_{II} для оценки напряженно-деформированного состояния у вершины узкого U-образного выреза некорректно. Оставаясь на позициях линейной механики разрушения, в работе предлагается оценивать напряженно-деформированное состояние у вершины рассматриваемого узкого U-образного выреза через два критерия плотности энергии упругой деформации W_σ и W_τ.

Критерии плотности энергии деформации W_σ и W_τ в полярной системе координат (по аналогии с теми же критериями для трещин-разрезов [15]) представим как

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\left[\sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\right] = \frac{1}{r}\left(C_1^2 a_{11\sigma} + C_1 C_2 a_{12\sigma} + C_2^2 a_{22\sigma}\right); \quad (10)$$

$$W_\tau = \frac{1}{2}\tau_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(C_1^2 a_{11\tau} + C_1 C_2 a_{12\tau} + C_2^2 a_{22\tau}\right). \quad (11)$$

Здесь для упрощения записи введены обозначения

$$C_1 = \frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi}}; \; C_2 = \frac{K_\mathrm{II}}{\sqrt{2\pi}}.$$

После преобразований (10) и (11) можно получить выражения

$$\begin{bmatrix} a_{11\sigma} \\ a_{12\sigma} \\ a_{22\sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\mu}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_1E_1 + B_1\left(E_1 + F_1'\right) \\ \frac{1}{2}\left(A_1E_2 + A_2E_1\right) + B_1\left(E_2 + F_2'\right) + B_2\left(E_1 + F_1'\right) \\ \frac{1}{2}A_2E_2 + B_2\left(E_2 + F_2'\right) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11\tau} \\ a_{12\tau} \\ a_{22\tau} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\mu}\begin{bmatrix} D_1\left(E_1' - \frac{1}{2}F_1\right) \\ D_1\left(E_2' - \frac{1}{2}F_2\right) + D_2\left(E_1' - \frac{1}{2}F_1\right) \\ D_2\left(E_2' - \frac{1}{2}F_2\right) \end{bmatrix},$$

где E_1', E_2', F_1', F_2' — величины, представляющие собой продифференцированные по θ функции E_1, E_2, F_1, F_2.

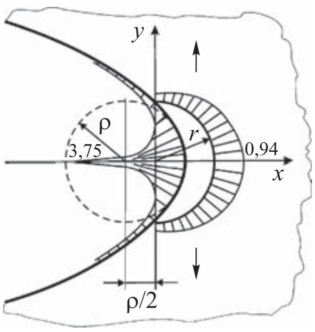
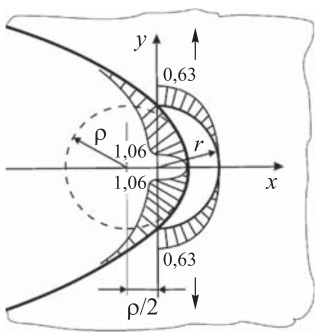
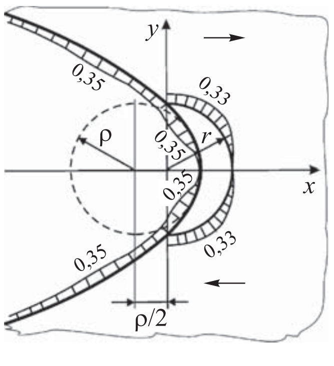
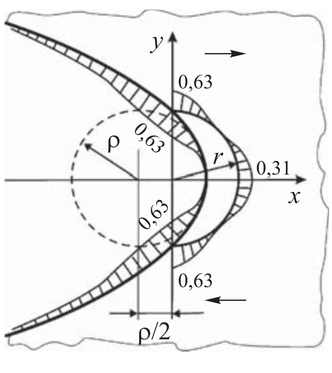
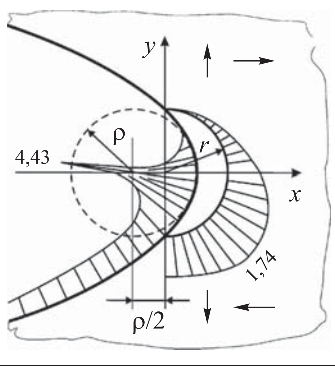
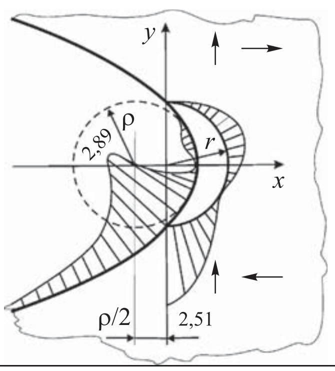
Основываясь на гипотезе Бельтрами, будем полагать, что разрушение в точке с координатой θ_{cr} в поверхностном слое на контуре вершины узкого U-образного выреза происходит тогда, когда плотности энергии деформации W_σ или W_τ равны или больше своих критических значений: $W_\sigma \ge W_{\sigma cr}$ или $W_\tau \ge W_{\tau\, cr}$.

Примечание. *Согласно [9], в эллиптических координатах плотность энергии деформации* W_σ *в поверхностном слое вершины выреза можно представить как* $W_\sigma = (1/2)\sigma_\eta \varepsilon_\eta$, *где* $\sigma_\eta = \sigma_r + \sigma_\theta$ *и* $\varepsilon_\eta = \left(\left(1-\nu^2\right)/E\right)\sigma_\eta$ *(плоская деформация). Если не учитывать деформационные свойства материала (т. е. деформацию* ε_η*), то фактически имеет место критерий максимального напряжения* σ_η *[15].*

Эпюры плотностей энергии деформации W_σ и W_τ на кромках вершины узкого U-образного выреза для различных схем нагружения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение эпюр плотностей энергии деформации W_σ и W_τ при различных схемах нагружения на кромке и внутри плоского тела с узким U-вырезом

Параметр интенсивности напряжений	$W_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta\right)$	$W_\tau = \frac{1}{2}\tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}$
	Схема mode I	
$C_1 = 1$		
	Схема mode II	
$C_2 = 1$		
$C_1 = 1$ $C_2 = 1$		

Эпюры построены для задачи плоской деформации при следующих условных исходных данных: модуль сдвига $\mu = 0,4$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Параметры интенсивности напряжений

$$C_1 = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}} = 1, \ \ C_2 = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

где K_{I}, K_{II} — параметры, рассматриваемые как нагрузочные.

Радиус вершины узкого U-образного выреза $\rho = 1$. Для нормального разрыва (*mode* I) максимальная плотность энергии деформации W_σ наблюдается для точки контура в направлении $\theta = 0$. Это направление возможного разрушения хрупкого материала не вызывает сомнений ни с позиции теории, ни с позиции практики. Для поперечного сдвига (*mode* II) максимальная плотность энергии деформации W_τ наблюдается на кромке при $\theta = \pm 90{,}2°$, и в критическом случае разрушение начнется за счет сдвига (скола).

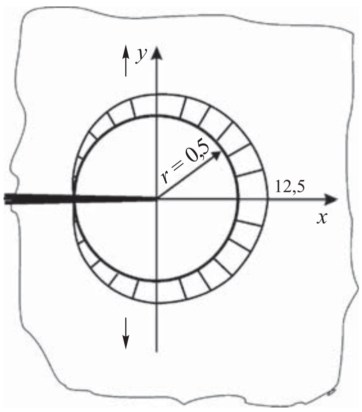
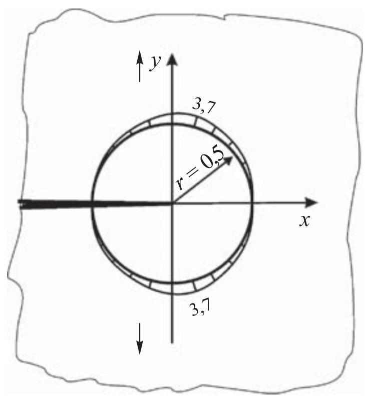
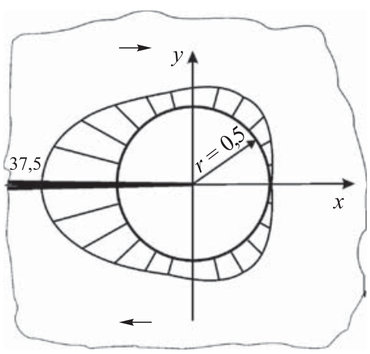
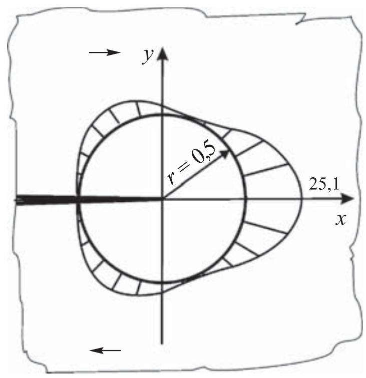
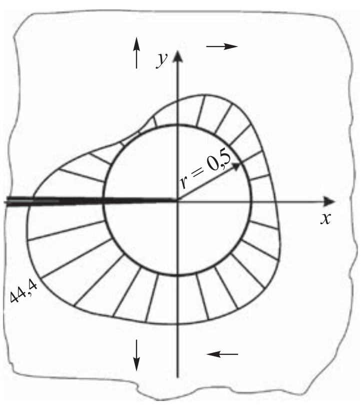
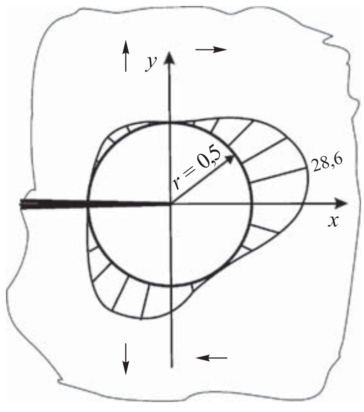
Кроме эпюр W_σ и W_τ на контуре у вершины узкого U-образного выреза, в табл. 1 для сравнительных целей приведены эпюры плотностей энергии деформации, которые имеют место на небольшой глубине (в частности, $r = 1$) от вершины. Есть похожие картины, но есть и отличия в связи с разными исходными геометрическими факторами.

Качественные трансформации, происходящие с эпюрами плотности энергии деформации при $\rho = 0$, показаны в табл. 2 (т. е. когда радиус ρ настолько мал, то можно полагать, что имеем дело с классической трещиной-разрезом). В таблицах в изображениях соответствующих эпюр можно найти приблизительно похожие картины. Кроме типовых схем нагружения (*mode* I или *mode* II), для сравнительных целей показаны несколько усложненные схемы нагружения (*mode* I + *mode* II). При этом также можно найти достаточно похожие картины эпюр плотности энергии деформации.

Следует отметить, что при рассмотрении эпюр, приведенных в табл. 1 и 2, при коэффициенте интенсивности K_{I} могут рассматриваться вероятные разрушения не только отрывом, но и сдвигом (сколом). При коэффициенте интенсивности напряжений K_{II} могут рассматриваться вероятные разрушения не только за счет сдвига (скола), но и отрыва. Такое разнообразие картин разрушения связано с тем, что здесь рассмотрены два отдельных независимых критерия разрушения W_σ и W_τ вместо одного $W = W_\sigma + W_\tau$, как в [16].

Таблица 2

Сравнение эпюр плотностей энергии деформации W_σ и W_τ при различных схемах нагружения трещины-разреза $(\rho = 0)$

Параметр интенсивности напряжений	$W_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta\right)$	$W_\tau = \frac{1}{2}\tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}$
	Схема mode I	
$C_1 = 1$		
	Схема mode II	
$C_2 = 1$		
	Схема mode I + *mode* II	
$C_1 = 1$ $C_2 = 1$		

Точность полученных асимптотических формул. Установим точность формул, например, для плотности энергии деформации W_σ у вершины узкого U-образного выреза (см. [13, 14]). В качестве объекта исследования выберем схему *mode* I и направление $\theta = 0,$ где $r = \rho / 2$ (кромка U-образного выреза). Сравним точные решения, полученные по формуле

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y\right), \tag{12}$$

и асимптотические, полученные из (10) и представленные формулой

$$W_\sigma = \frac{1}{8\mu}\frac{1}{r} S^2 \frac{a}{2}\left[2\left(\kappa - 1\right) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Для (12) точные значения для σ_x и σ_y рассчитывались на основе комплексных выражений (4). Точные значения деформаций ε_x и ε_y определялись из обобщенного закона Гука для плоской деформации.

Относительная погрешность определялась для двух вариантов исходных данных эллиптического отверстия: 1) $\rho = 0,1;$ 2) $\rho = 1.$ В обоих вариантах условно принимались следующие значения: внешняя нагрузка $S = 1;$ модуль сдвига $\mu = 1;$ большая полуось эллиптического отверстия $a = 100;$ коэффициент Пуассона $\nu = 0,3.$ Характеристика эллипса определялась по формуле $\xi_0 = \mathrm{ch}^{-1}\dfrac{a}{a - \rho}.$

Для варианта 1 относительная погрешность равна –3 %, для второго варианта –10 %. Во многих случаях это вполне применимо для практического использования асимптотической формулы (10).

Заключение. Представлены исследования напряженно-деформированного состояния у вершины узкого U-образного выреза на основе комплексных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ с позиции линейной механики разрушения. Приведены полные наборы асимптотических формул для напряжений и перемещений, выражения для плотности энергии деформации W_σ и W_τ у кромки вершины эллиптического выреза через коэффициенты интенсивности напряжений K_{I} для схемы *mode* I и K_{II} для схемы *mode* II. На основе гипотезы Бельтрами предположено, что начальное трещинообразование в вершине эллиптического или гиперболического выреза происходит, когда плотность энергии деформации W_σ или W_τ в поверхностном слое при некоторой координате θ достигает критического значения $W_{\sigma cr}$ или $W_{\tau cr}$. Показано, что с уменьшением радиуса ρ асимптотические решения для плотности энергии деформации у вершины U-образного выреза становятся все более точными. Это также характеризует точность представленных асимптотических формул для напряжений и перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нейбер Г. Концентрация напряжений. М., Л., Гостехиздат, 1947.

[2] Космодианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, Вища школа, 1975.

[3] Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. М., Мир, 1977.

[4] Иосилевич Г.Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин. М., Машиностроение, 1981.

[5] Гиренко С.Н., Криксунов Э.З., Перельмутер М.А. КоКон. Определение коэффициентов концентрации напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений. М., SCAD Soft, 2005.

[6] Тарабрин Г.Т., Левщанова Л.Л. Разрушение перемычки эллиптического отверстия в пластине. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2007, № 6, с. 3–7.

[7] Максимов А.В. Исследование напряженного состояния при одноосном растяжении плоскости с эллиптическим отверстием. *Вестник ТулГУ. Математика, механика, информатика*, 2008, т. 14, № 2, с. 105–114.

[8] Матвиенко Ю.Г. Подходы механики разрушения в анализе деформирования и разрушения тел с вырезами и надрезами. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2008, № 5, с. 64–72.

[9] Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack. Master’s Thesis. Lehigh Univ., 1966.

[10] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1979.

[11] Creager M., Paris P.C. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking. *Int. J. Fract. Mech.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 247–252.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00182890

[12] Heckel K., Wagner R. The tensile fatigue behavior of CT-specimens with small notch root radius. *Int. J. Fract.*, 1975, vol. 11, no. 1, pp. 135–140.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00034720

[13] Овчаренко Ю.Н. Упругое напряженно-деформированное состояние и плотность энергии деформации у вершины предельно узких U-вырезов. *Известия ТулГУ. Естественные науки*, 2010, № 2, с. 97–108.

[14] Овчаренко Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние и плотность энергии деформации в вершине предельно узких U-вырезов. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2013, № 10, с. 78–90.

[15] Овчаренко Ю.Н. К теории (концепции) разрушения «локальная плотность энергии деформации». *Известия ТулГУ. Естественные науки,* 2014, № 4, с. 80–92.

[16] Sih G.C. Strain energy density and surface layer energy for blunt cracks or notches. In: *Mechanics of Fracture Initiation and Propagation. Engineering Applications of Fracture Mechanics*, vol. 11. Dordrecht, Springer, 1991, pp. 126–181.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-3734-8_5

Овчаренко Юрий Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Сварка, литье и технология конструкционных материалов» ТулГУ (Российская Федерация, 300012, Тула, Ленина пр-т, д. 92).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Овчаренко Ю.Н. Теория узких U-образных вырезов в линейной механике разрушения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 1 (94), с. 57–72. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-57-72

THEORY OF NARROW U-SHAPED NOTCHES IN LINEAR FRACTURE MECHANICS

Yu.N. Ovcharenko ovcharenkos@rambler.ru

Tula State University, Tula, Russian Federation

Abstract

On the basis of linear fracture mechanics, a complete set of asymptotic formulas is obtained to describe the stress-strain state at the top of a narrow U-shaped notch. This type of defect can be possessed by a crack that has undergone a corrosive effect of the environment, or there can be a crack-like defect in a welded joint, e.g. lack of penetration, undercut, or a narrow slot in the part. To comparatively assess the risk of cracking at the tops of narrow U-shaped notches, and identify the places and directions of fracture initiation, we reveal the possibility of using such energy criteria as the deformation energy density W_σ and W_τ. The previously indicated criteria were proposed by the author of this work for classical cracks-cuts. The purpose of this work was to study, on the basis of singular solutions of linear fracture mechanics, the stress-strain state in terms W_σ and W_τ near the tops of extremely narrow U-shaped notches, i.e., *blunt cracks*, in comparison with classical cracks-cuts

Keywords

Linear fracture mechanics, narrow U-shaped notch, strain energy density, mode I, mode II

Received 29.03.2019
Accepted 08.10.2020

REFERENCES

[1] Neyber G. Kontsentratsiya napryazheniy [Stress concentration]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947.

[2] Kosmodianskiy A.S. Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, vyrezami i vystupami [Plane elastic problem for perforated notched lugged plate]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1975.

[3] Peterson R.E. Stress concentration factors. Wiley, 1953.

[4] Iosilevich G.B. Kontsentratsiya napryazheniy i deformatsiy v detalyakh mashin [Stress and deformation concentration in machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981.

[5] Girenko S.N., Kriksunov E.Z., Perel'muter M.A. KoKon. Opredelenie koeffitsientov kontsentratsii napryazheniy i koeffitsientov intensivnosti napryazheniy [KoKon. Determination of stress concentration factors and stress intensity factors]. Moscow, SCAD Soft Publ., 2005.

[6] Tarabrin G.T., Levshchanova L.L. Bypass destruction of an elliptic hole in a plate. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2007, no. 6, pp. 3–7 (in Russ.).

[7] Maksimov A.V. Study on stress state of a plane with elliptic hole under one-axial strain. *Vestnik TulGU. Matematika, mekhanika, informatika*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 105–114 (in Russ.).

[8] Matvienko Yu.G. Fracture mechanics approaches in the analysis of strains and fractures of bodies with notches and scotches. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 5, pp. 469–475. DOI: https://doi.org/10.3103/S1052618808050105

[9] Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack. Master's Thesis. Lehigh Univ., 1966.

[10] Goodier J.N., Timoshenko S.P. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970.

[11] Creager M., Paris P.C. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking. *Int. J. Fract. Mech.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 247–252. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00182890

[12] Heckel K., Wagner R. The tensile fatigue behavior of CT-specimens with small notch root radius. *Int. J. Fract.*, 1975, vol. 11, no. 1, pp. 135–140.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00034720

[13] Ovcharenko Yu.N. Elastic stress-strain state and deformation power density at the top of extremely thin U-notches. *Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki* [News of the Tula State University. Natural Sciences], 2010, no. 2, pp. 97–108 (in Russ.).

[14] Ovcharenko Yu.N. The elastic stress-deformed conditions and density of energy of deformation at top extremely narrow U-notches. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki* [News of the Tula State University. Technical Sciences], 2013, no. 10, pp. 78–90 (in Russ.).

[15] Ovcharenko Yu.N. To deformation theory (conception) "local density of deformation power". *Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki* [News of the Tula State University. Natural Sciences], 2014, no. 4, pp. 80–92 (in Russ.).

[16] Sih G.C. Strain energy density and surface layer energy for blunt cracks or notches. In: *Mechanics of Fracture Initiation and Propagation. Engineering Applications of Fracture Mechanics*, vol. 11. Dordrecht, Springer, 1991, pp. 126–181.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-3734-8_5

Ovcharenko Yu.N. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of the Welding, Casting and Technology of Structural Materials, Tula State University (Lenina prospekt 92, Tula, 300012 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Ovcharenko Yu.N. Theory of narrow U-shaped notches in linear fracture mechanics. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 1 (94), pp. 57–72 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-57-72