

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТВЭЛА С ПОМОЩЬЮ MORTAR-МЕТОДА И МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ

П.С. Аронов<sup>1,2</sup>

М.П. Галанин<sup>1,2</sup>

А.С. Родин<sup>1,2</sup>

aronovps@mail.ru

galan@keldysh.ru

rals@bk.ru

<sup>1</sup> ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Представлены алгоритмы решения осесимметричных задач контактного взаимодействия нескольких термоупругих тел на несогласованных сетках. Численное решение задач теплопроводности и теории упругости выполнено с использованием метода конечных элементов. Для учета контактного взаимодействия применены mortar-метод и метод декомпозиции области. При использовании mortar-метода возникает необходимость решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений с нулевым блоком на главной диагонали. Для ее численного решения использован модифицированный метод последовательной верхней релаксации (MSSOR), позволяющий свести решение системы уравнений для всех контактирующих тел к последовательному решению систем уравнений для каждого тела по отдельности. На примере задачи, моделирующей термомеханические процессы в твэле, продемонстрированы результаты работы алгоритмов, проанализированы особенности напряженно-деформированного состояния конструкции, выполнено сравнение результатов, полученных при использовании mortar-метода и метода декомпозиции области. В рассмотренной задаче расчетная область состояла из 10 топливных таблеток и участка оболочки. Результаты анализа показали, что количественные характеристики напряженно-деформированного состояния системы тел, полученные двумя

### Ключевые слова

*Контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, метод декомпозиции области, твэл*

методами, достаточно близки друг к другу. Это подтверждает корректность применения указанных алгоритмов для решения подобных задач

Поступила 26.09.2020

Принята 26.10.2020

© Автор(ы), 2021

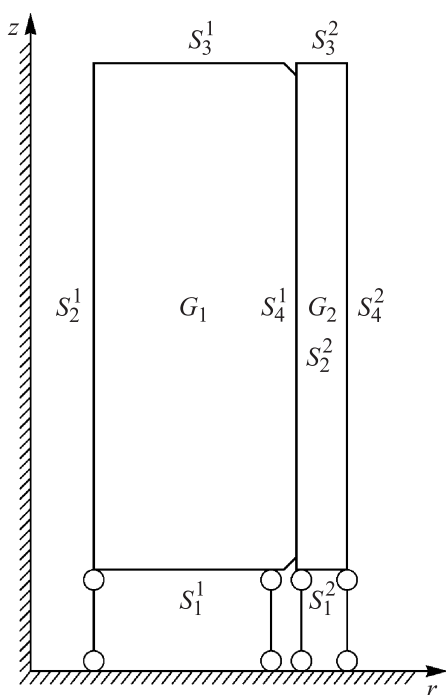
---

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты РФФИ № 18-01-00252 и № 18-31-20020)*

**Введение.** Исследование механики контактного взаимодействия является важной проблемой при анализе характера деформирования и прочности инженерных конструкций. Для практически важных контактных задач невозможно получить аналитическое решение, поэтому для определения поля перемещений и напряжений используют различные численные методы, например метод штрафных функций [1], варианты метода множителей Лагранжа [2, 3], а также варианты метода декомпозиции области (МДО) [4, 5]. Каждый метод имеет преимущества и недостатки. Так, для метода штрафных функций выбор неудачного значения параметра штрафа может привести либо к значительному захлесту тел, либо к формированию плохо обусловленной матрицы. Использование метода множителей Лагранжа приводит к решению системы уравнений с нулевым блоком на диагонали. Применение МДО всегда требует проведения внешнего итерационного цикла, и следовательно, дополнительных вычислительных затрат. Решение задачи для системы тел, включающей в себя несколько пар контактных поверхностей, которые могут сдвигаться относительно друг друга, представляет особую сложность. В этом случае практически всегда отсутствует возможность использования согласованных сеток. Изменение конфигурации одной пары контактных поверхностей влияет на всю систему, поэтому решение можно получить только с помощью итерационной процедуры, которая должна быть эффективной и сходиться за разумное число итераций.

*Цель работы* — изучить задачу, моделирующую процессы в твэлах в осесимметричной термоупругой постановке с учетом контактного взаимодействия топливных таблеток и оболочки. Для численного решения использован mortar-метод, являющийся одним из вариантов метода множителей Лагранжа [6, 7], а также алгоритм, представляющий собой комбинацию аддитивного метода Шварца (вариант МДО с перекрытием вводимых подобластей) [8] и метода Неймана — Дирихле (вариант МДО без перекрытия) [8, 9]. Проведено сравнение результатов численного моделирования, полученных с использованием указанных методов.

**Математическая постановка задачи.** Пусть в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  расположена группа осесимметричных термоупругих контактирующих тел, занимающих область  $G = \bigcup_{\alpha=1}^N G_\alpha$  ( $\alpha$  — индекс, обозначающий номер тела), ограниченную кусочно-гладкой границей  $\partial G = \bigcup_{\alpha=1}^N \partial G_\alpha$ .



**Рис. 1.** Схема расчетной области для случая одной таблетки ( $N = 2$ )

Рассмотрим задачу: внутри цилиндрической оболочки  $G_N$  расположен столб из нескольких поставленных друг на друга одинаковых цилиндрических таблеток  $G_1, \dots, G_{N-1}$ , имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Расчетная область для случая одной таблетки ( $N = 2$ ) показана на рис. 1. Задача моделирует происходящие в твэлах термомеханические процессы. Введем следующие обозначения для поверхностей тел:  $S_1^\alpha$  — нижний торец тела с номером  $\alpha$ ;  $S_1 = S_1^1 \cup S_1^N$  — объединение нижнего торца нижней таблетки и нижнего торца оболочки;  $S_2^\alpha$  — внутренняя поверхность тела с номером  $\alpha$ ;  $S_2 = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} S_2^\alpha$  — объединение внут-

ренних поверхностей таблеток;  $S_3^\alpha$  — верхний торец тела с номером  $\alpha$ ;  $S_4^\alpha$  — внешняя поверхность тела с номером  $\alpha$ ;  $S_4 = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} S_4^\alpha$  —

объединение внешних поверхностей таблеток (без фасок).

Предположим, что зависимостью температуры от деформации тела можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности будем решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении контактной задачи теории термоупругости.

Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности в области  $G_p = G \setminus G_N$  (топливные таблетки):

$$\begin{aligned}
 c(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= (k_{ij}(T)T_{,j})_{,i} + q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in G_p, \quad t > 0; \\
 T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_p; \\
 -n_i k_{ij}(T)T_{,j} |_{\partial G_p} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_p \setminus S_4, \quad t > 0; \\
 -n_i k_{ij}(T)T_{,j} |_{S_4} &= \alpha [T(\mathbf{x}, t) - T_f(\bar{\mathbf{x}}, t)], \quad \mathbf{x} \in S_4, \quad \bar{\mathbf{x}} \in S_2^N, \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $c(T)$  — удельная массовая теплоемкость среды;  $\rho$  — плотность среды;  $t$  — время;  $k_{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности;  $T_{,j} = \partial T / \partial x_j$ ;  $q(\mathbf{x}, t)$  — мощность внутренних источников теплоты;  $T_0(\mathbf{x})$  — начальная температура;  $T(\mathbf{x}, t)$  — температура в момент времени  $t$ ;  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе  $\partial G_p$ ;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на поверхности  $S_4$ ;  $T_f(\bar{\mathbf{x}})$  — температура в сходственной точке, лежащей на внутренней поверхности оболочки.

В проведенных расчетах принято, что  $T_0 = 300$  К, температура всей оболочки является постоянной ( $T_f = 623$  К),  $q(\mathbf{x}, t) = q_0(t) \left( 1 + \sin \frac{\pi z}{L} \right)$ , где  $L$  — высота топливного столба, а величина  $q_0(t)$  меняется во времени следующим образом: за 1 ч линейно возрастает от 0 до номинального значения  $q_{nom}$  и далее остается постоянной.

Математическая формулировка контактной задачи теории упругости для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя соотношения [10] для каждого тела  $\alpha$ , участвующего в контакте ( $i, j = 1, \dots, 3$ ):

– уравнения равновесия

$$L(\mathbf{u}) = -\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \tag{2}$$

– кинематические граничные условия

$$u_z(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1; \tag{3}$$

– силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j = g_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G \setminus S_1; \tag{4}$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \tag{5}$$

– определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha. \tag{6}$$

Здесь  $x_i$  — координаты вектора  $\mathbf{x} \in G_\alpha$ ;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензора деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора начальной деформации (для термоупругого тела таковыми являются температурные деформации);  $u_i$  — компоненты вектора перемещения;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $g_i$  — компоненты вектора поверхностных сил;  $n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности  $S_j$ . В проведенных расчетах полагалось, что нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по вертикали,  $g_i(\mathbf{x})$  отличается от нуля только на верхнем торце верхней таблетки  $S_3^{N-1}$  (постоянное давление 50 МПа) и на внешней поверхности оболочки  $S_4^N$  (постоянное давление 10 МПа). В модели учитывалось, что каждая таблетка (кроме  $G_1$  и  $G_{N-1}$ ) вступает в контакт с двумя соседними (сверху и снизу) таблетками и оболочкой (полагается, что начального зазора между ними нет).

Рассмотрим пару потенциально контактных поверхностей, относящихся к телам с номерами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для упрощения записи будем использовать индекс «1» вместо « $\alpha_1$ » и «2» вместо « $\alpha_2$ ». Тогда дополнительные условия на поверхности  $S_k^1$  для случая контакта без трения выглядят следующим образом (для поверхности  $S_k^2$  условия записываются аналогично) [6, 9]:

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}_1) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1; \quad (7)$$

$$\sigma_{1n}(\mathbf{x}_1) = \sigma_{2n}(\bar{\mathbf{x}}_2) \leq 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in S_k^2; \quad (8)$$

$$u_{1n}(\mathbf{x}_1) + u_{2n}(\bar{\mathbf{x}}_2) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in S_k^2; \quad (9)$$

$$\sigma_{1n}(\mathbf{x}_1) (u_{1n}(\mathbf{x}_1) + u_{2n}(\bar{\mathbf{x}}_2) - \delta_{0n}(\mathbf{x}_1)) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in S_k^2. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{x}_1$  — некоторая точка, лежащая на поверхности  $S_k^1$ ;  $\bar{\mathbf{x}}_2$  — соответствующая точка, находящаяся напротив нее на поверхности  $S_k^2$ ;  $\delta_{0n}(\mathbf{x}_1) \geq 0$  — функция, задающая начальный зазор (участки поверхности в начальный момент могли не соприкасаться друг с другом);  $u_{\alpha n} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha$ ;  $\sigma_{\alpha\tau} = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha$ ;  $\sigma_{\alpha n} = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\alpha$ .

В качестве  $(S_{1k}, S_{2k})$  выступают следующие контактные пары: таблетка/таблетка  $(S_3^\alpha, S_1^{\alpha+1})$ ,  $\alpha = 1, \dots, N-2$ , и таблетка/оболочка  $(S_4^\alpha, S_2^N)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N-1$  (всего  $2N-3$  контактные пары).

Условия (7)–(10) гарантируют, что на некотором участке  $S_k^{12}$  поверхности  $S_k^1$  и  $S_k^2$  будут совпадать (заранее конфигурация и положение этого участка неизвестны), при этом на контактирующие тела будут действовать сжимающие контактные силы. Условия (7)–(10) учитывают ситуации, когда в начальной конфигурации какие-то участки не соприкасались друг с другом, но в результате они вступают в контакт, или наоборот: в начальной конфигурации участки соприкасались друг с другом, но в итоге они расходятся.

В рассматриваемой задаче участок поверхности оболочки  $S_2^N$ , который будет контактировать с поверхностью  $i$ -й таблетки  $S_4^i$ , заранее неизвестен. Это связано с тем, что вследствие нагрева топливный столб значительно смещается относительно начального положения. В контактных парах таблетка/таблетка ввиду нагрева большая часть поверхностных элементов выходит из контакта (кроме нескольких элементов, расположенных ближе к внутреннему отверстию таблетки).

Для дискретизации уравнений теплопроводности (1) и задачи механики (2)–(6) использован метод конечных элементов, а для учета контактного взаимодействия тел — mortar-метод и МДО.

**Применение mortar-метода для решения контактных задач.** Решение задачи (2)–(10) эквивалентно [11] минимизации функционала

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dG - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS + \int_{S_k} \lambda_n (u_{2n}(\mathbf{x}) + u_{1n}(\mathbf{x})) dS \quad (11)$$

при выполнении кинематических граничных условий (3), где  $\lambda_n$  — множители Лагранжа, являющиеся проекциями векторов напряжений на направления внешних нормалей,  $u_n = u_r n_r + u_z n_z$ .

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости основан на независимой конечно-элементной дискретизации непересекающихся подобластей. Сетки на этих подобластях являются несогласованными на линии контакта, а непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа [12].

Для упрощения записи ограничимся случаем двух тел с одной парой контактных поверхностей. Пусть тело  $G_m$  является активным (master), а тело  $G_s$  — пассивным (slave). Линию контакта со стороны тела  $G_m$  обозначим через  $\Gamma_m$ , а со стороны тела  $G_s$  — через  $\Gamma_s$ . Рассмотрим одномерные конечные элементы второго порядка на линиях контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$ . Из узлов этих элементов на линии контакта  $\Gamma_m$  проведем нормали на линию контакта  $\Gamma_s$ . По образованным при пересечении нормалей

и  $\Gamma_s$  конечным элементам будем вести дальнейшее интегрирование, полагая их также одномерными квадратичными элементами с аналогичными функциями формы. Являясь во многом условным и неочевидным, деление тел на активное/пассивное (master/slave) в конечном счете определяет дискретизацию множителей Лагранжа [13].

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_s) d\gamma = \sum_{i=1}^{k_m} \int_{\Gamma_{mi}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_m d\gamma + \sum_{i=1}^{k_s} \int_{\Gamma_{si}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_s d\gamma, \quad (12)$$

где  $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_s$ ;  $\boldsymbol{\lambda}$  — вектор, состоящий из множителей Лагранжа, соответствующих проекциям векторов напряжений на направления внешних нормалей на линии контакта  $\Gamma_s$ ;  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_s$  — векторы, состоящие из нормальных компонент векторов перемещений узлов конечного элемента на линиях контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$ ;  $k_m$ ,  $k_s$  — общее число конечных элементов, на которые разбиты линии контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$ . Внутри конечного элемента с номером  $(e)$  значения  $\lambda_n$ ,  $u_s$  и  $u_m$  выражаются следующим образом:

$$\lambda_n = [N_\lambda]^{(e)} \{\lambda\}^{(e)}, \quad u_s = [N_s]^{(e)} \{u_s\}^{(e)}, \quad u_m = [N_m]^{(e)} \{u_m\}^{(e)},$$

где  $[N_\lambda]^{(e)}$ ,  $[N_s]^{(e)}$ ,  $[N_m]^{(e)}$  — матрицы функций формы одномерного квадратичного элемента с номером  $(e)$ .

Минимизация функционала (11) совместно с интегралом (12) приводит к формированию системы линейных алгебраических уравнений [14]:

$$\begin{pmatrix} A & M \\ M^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь

$$A = \text{diag} (A_{11}, \dots, A_{NN}),$$

$$[A_{ii}] = \sum_{e=1}^{k_i} [a_G]^{(e)T} \left( \int_{G_i} [B]^{(e)T} [D_i]^{(e)} [B]^{(e)} dG \right) [a_G]^{(e)};$$

$$M = (M_1, \dots, M_N)^T,$$

$$M_i = (0 \dots 0 \ M_{i1} \ 0 \dots 0 \ M_{ij} \ 0 \dots 0 \ M_{ip} \ 0 \dots 0);$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N), \quad \{R_i\} = \sum_{e=1}^{k_i} [a_S]^{(e)T} \left( \int_{G_i} [N]^{(e)T} [g_i]^{(e)} dV \right),$$



$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^T; \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{q-1} \quad \lambda_q)^T,$$

где  $N$  — число тел;  $q$  — число контактных пар;  $[a_G]^{(e)}$ ,  $[a_S]^{(e)}$  — матрицы геометрических связей конечного элемента с номером  $(e)$ ;  $[D_i]^{(e)}$  — локальные матрицы упругости конечного элемента;  $\{g_i\}$  — локальные векторы поверхностных сил;  $k_i$  — число конечных элементов, на которые разбито тело  $G_i$ , в матрицах  $M_i$  в столбцах, соответствующих номерам тел, контактирующих с телом с номером  $i$ , располагаются матрицы

$$[M_{ij}] = \sum_{e=1}^{k_i} [a_S]^{(e)T} \left( \int_{\Gamma_{si}} [N]^{(e)T} [N]^{(e)} d\gamma \right) [a_S]^{(e)}.$$

Матрицы  $A_{ii}$  имеют размерность  $n_i \times n_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $n_i$  — число неизвестных перемещений в  $i$ -м теле,  $n = n_1 + \dots + n_N$  — общее число неизвестных перемещений, матрицы  $M_i$  имеют размерность  $n_i \times m$ ,  $m = m_1 + \dots + m_q$  — общее число неизвестных множителей Лагранжа, матрицы  $M_{ij}$  имеют размерность  $n_i \times m_j$ ,  $m_j$  — число неизвестных множителей Лагранжа для  $j$ -й контактной пары, в которую входит  $i$ -е тело.

Для численного решения системы (13) использован модифицированный метод последовательной верхней релаксации (MSSOR), позволяющий свести решение общей плохо обусловленной системы уравнений для всех контактирующих тел к последовательному решению систем уравнений отдельно для каждого тела [15].

**Применение метода декомпозиции областей для решения контактных задач.** Задача (2)–(10) может быть решена с использованием МДО

[8, 16]. Представим область  $G$  в виде объединения  $G = \bigcup_{\alpha=1}^M \Omega_\alpha$  конечного

числа подобластей  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  с границами  $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_M$  ( $\bar{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i$ ),  $\partial\Omega_{iN}$  — участок границы  $i$ -й подобласти, на котором задано условие Неймана (силовое),  $\partial\Omega_{iD}$  — участок границы  $i$ -й подобласти, на котором задано условие Дирихле (кинематическое). Подобласти  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  могут пересекаться. В МДО можно выделить два класса методов: 1) методы, в которых каждая введенная подобласть имеет ненулевое пересечение хотя бы с одной другой подобластью (методы Шварца или методы с перекрытием); 2) методы, в которых введенные подобласти не пересекаются друг с другом. Здесь использован аддитивный метод Шварца.



Суть метода состоит в построении последовательности функций  $\{\mathbf{u}_n\}$ . На каждой итерации сначала решаются локальные задачи ( $i = 1, \dots, M$ ) [2]:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i^{m+1} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^{m+1}) \mathbf{n} &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{iN}; \\ \mathbf{u}_i^{m+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G} \setminus (\Omega_i \cup \partial\Omega_{iN}). \end{aligned} \quad (14)$$

Итоговое решение в конце каждой итерации определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \alpha \sum_{i=1}^M (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}^m),$$

где  $\alpha$  — некоторый итерационный параметр, от значения которого во многом зависит сходимость итерационного процесса.

После дискретизации задачи методом конечных элементов решение каждой локальной задачи (14) сводится к решению системы линейных уравнений вида (размерность векторов совпадает с числом узлов сетки в данной подобласти, умноженным на размерность задачи):  $[K_i]\{U_i\} = \{R_i\}$ .

В рассматриваемой задаче расчетная область разбита на подобласти без перекрытия  $V_1, \dots, V_M$ ,  $M = N$ . Подобласть  $V_1$  является объединением нижней половины нижней таблетки и соответствующего ей участка оболочки, подобласть  $V_M$  — объединением верхней половины верхней таблетки и соответствующего ей участка оболочки, для других случаев подобласть  $V_i$  — объединение верхней половины  $i$ -й таблетки, нижней половины  $(i+1)$ -й таблетки и соответствующего им участка оболочки. Подобласть  $\Omega_i$  получается объединением подобласти  $V_i$  и дополнительных участков соседних подобластей  $V_{i-1}$  и  $V_{i+1}$  с размерами, задаваемыми выбранным коэффициентом относительного перекрытия (обычно 0,4).

Следовательно, при решении каждой локальной задачи необходимо учитывать контактное взаимодействие участков соприкасающихся тел. Для этого использован метод Неймана — Дирихле, который является одним из вариантов МДО без перекрытия. Рассмотрим алгоритм этого метода для случая двух тел.

На каждой итерации сначала решается задача Неймана для первого тела [19]:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_1^{m+1} &= 0, \quad \mathbf{x} \in G_1; \\ \mathbf{u}_1^{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{1D}; \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{m+1}) \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{1N};$$

$$\sigma_{1n}^{m+1}(\mathbf{x}) = p_c^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_k^1;$$

$$\sigma_{1\tau}^{m+1}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_k^1.$$

Затем решается задача Дирихле для второго тела, которая в общем случае является нелинейной:

$$L\mathbf{u}_2^{m+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in G_2;$$

$$\mathbf{u}_2^{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,2};$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{m+1}) \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,2};$$

$$\mathbf{u}_{2n}^{m+1}(\mathbf{x}) + u_{1n}^{m+1}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_k^2, \quad \bar{\mathbf{x}} \in S_k^1; \quad (15)$$

$$\sigma_{2\tau}^{m+1}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_k^2;$$

$$\sigma_{2n}^{m+1}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in S_k^2;$$

$$\sigma_n^{m+1}(\mathbf{u}_{2n}^{m+1}(\mathbf{x}) + u_{1n}^{m+1}(\bar{\mathbf{x}}) - \delta_{0n}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_k^2, \quad \bar{\mathbf{x}} \in S_k^1.$$

В конце итерации происходит вычисление нового приближения для значения нормальных напряжений на границе  $S_k^1$  (на тех участках, которые после решения (15) находятся в контакте, на всех других участках  $p_c^{m+1}(\mathbf{x}) = 0$ ):

$$p_c^{m+1}(\mathbf{x}) = \theta \sigma_{2n}^{m+1}(\bar{\mathbf{x}}) + (1 - \theta) p_c^m(\mathbf{x}).$$

В рассматриваемой задаче для подобластей  $\Omega_1, \Omega_M$  решаются задачи контакта двух термоупругих тел (пара контактных поверхностей таблетка/оболочка), для остальных подобластей — задачи контакта трех термоупругих тел (пара контактных поверхностей таблетка/таблетка и две пары контактных поверхностей таблетка/оболочка). Все локальные задачи решаются независимо друг от друга. Использован следующий вариант метода Неймана — Дирихле ( $\theta = 0,5$ ): сначала решалась задача для нижней таблетки (на контактных поверхностях таблетка/таблетка и таблетка/оболочка заданы условия Неймана), затем задача для верхней таблетки (на контактной поверхности таблетка/таблетка задано условие Дирихле, на контактной поверхности таблетка/оболочка — условие Неймана) и далее задача для участка оболочки (на контактной поверхности таблетка/оболочка задано условие Дирихле). В качестве начального приближе-

ния на первой внешней итерации ставилось нулевое контактное давление, число внутренних итераций не превышало 5.

Для оптимизации числа итераций применен двухуровневый аддитивный метод Шварца, для которого вектор перемещений в узлах сетки в конце каждой итерации рассчитывается по формуле

$$\{U\}^{m+1} = \{U\}^m + \alpha \sum_{i=1}^M (\{U_i\}^{m+1} - \{U\}^m) + \alpha \{\Delta U_0\},$$

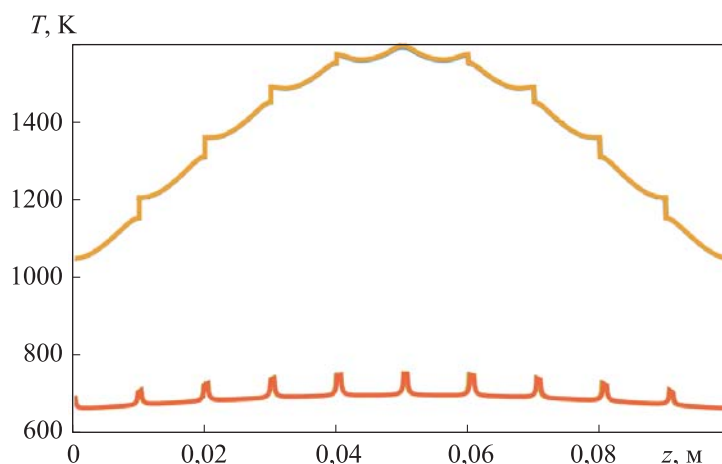
где  $\{\Delta U_0\}$  — решение задачи, полученное на грубой сетке и пересчитанное на узлы основной сетки путем интерполяции.

Грубая сетка строилась в двух телах: первое тело соответствовало объединению всех таблеток без учета их фасок, второе — совпадало с оболочкой. В радиальном направлении в каждом теле помещалась одна ячейка, в осевом направлении размер ячеек брался равным половине высоты таблетки. Для грубой сетки для каждого тела решалась линейная задача упругости, значения модуля Юнга эффективного материала в каждой ячейке определялись усреднением значений модуля Юнга в элементах основной сетки, которые попадали в рассматриваемую ячейку грубой сетки.

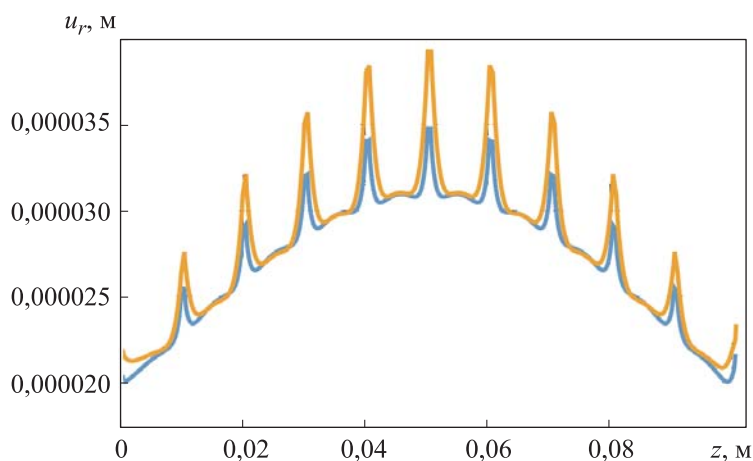
**Обсуждение полученных результатов.** Для сравнения двух представленных методов проведены два расчета для 10 таблеток ( $N=11$ ). В первом использована расчетная сетка из четырехугольных конечных элементов второго порядка, на которой решены тепловая задача и контактная задача с помощью mortar-метода. Во втором расчете использована сетка из четырехугольных элементов первого порядка, на которой решены тепловая задача и контактная задача с применением МДО.

Зависимость температуры  $T(z)$  на внутренней и внешней поверхностях таблеток представлена на рис. 2. На рисунке приведены несколько графиков, соответствующих двум расчетам. Поскольку результаты достаточно близки, они часто визуальны неотличимы друг от друга. На внутренней поверхности максимальная температура достигает 1595 К, на внешней — 752 К.

Зависимость радиального перемещения на внешней поверхности таблеток ( $S_4$ ) приведена на рис. 3, зависимость осевого перемещения на внешней поверхности ( $S_4$ ) таблеток и внутренней поверхности ( $S_2^N$ ) оболочки — на рис. 4. Максимальные осевые перемещения топливного столба на порядок больше аналогичных перемещений в оболочке.

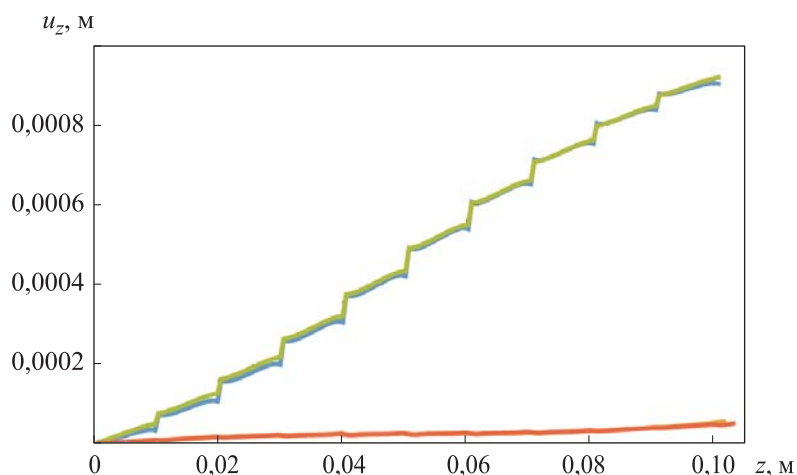


**Рис. 2.** Зависимости температуры  $T(z)$  в узлах сетки на внутренней ( $S_2$ ) и внешней ( $S_4$ ) поверхностях таблеток:  
 —  $S_2$ , расчет 1 и расчет 2; —  $S_4$ , расчет 1 и 2



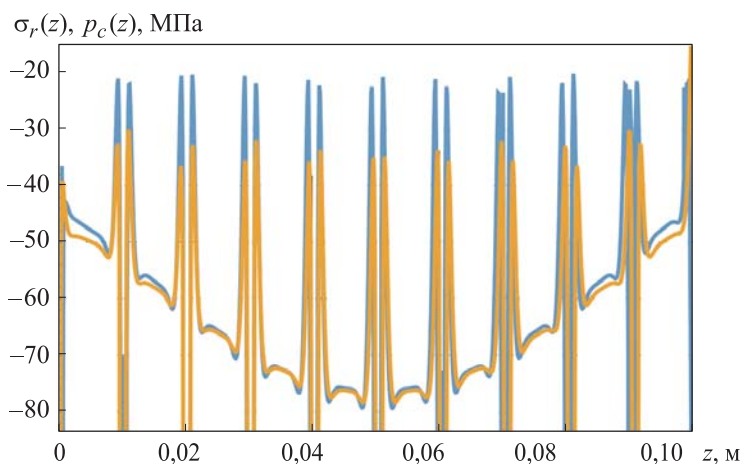
**Рис. 3.** Зависимость радиального перемещения  $u_r(z)$  в узлах сетки на внешней поверхности  $S_4$  таблеток:  
 — mortar-метод; — МДО

Зависимости радиального напряжения (для mortar-метода) и контактного давления (для МДО) на внешней поверхности таблеток ( $S_4$ ) приведены на рис. 5. Зависимость радиальных напряжений, полученных mortar-методом, на внешней поверхности ( $S_4$ ) таблеток и внутренней поверхности ( $S_2^N$ ) оболочки для участка, соответствующего второй, третьей и четвертой таблеткам, показана на рис. 6, а. Аналогичные графики, полученные с использованием МДО, представлены на рис. 6, б. На контактных поверхностях тел силовое условие (равенство нормаль-



**Рис. 4.** Зависимость осевого перемещения  $u_z(z)$  в узлах сетки на внешней поверхности ( $S_4$ ) таблеток и внутренней поверхности ( $S_2^N$ ) оболочки:

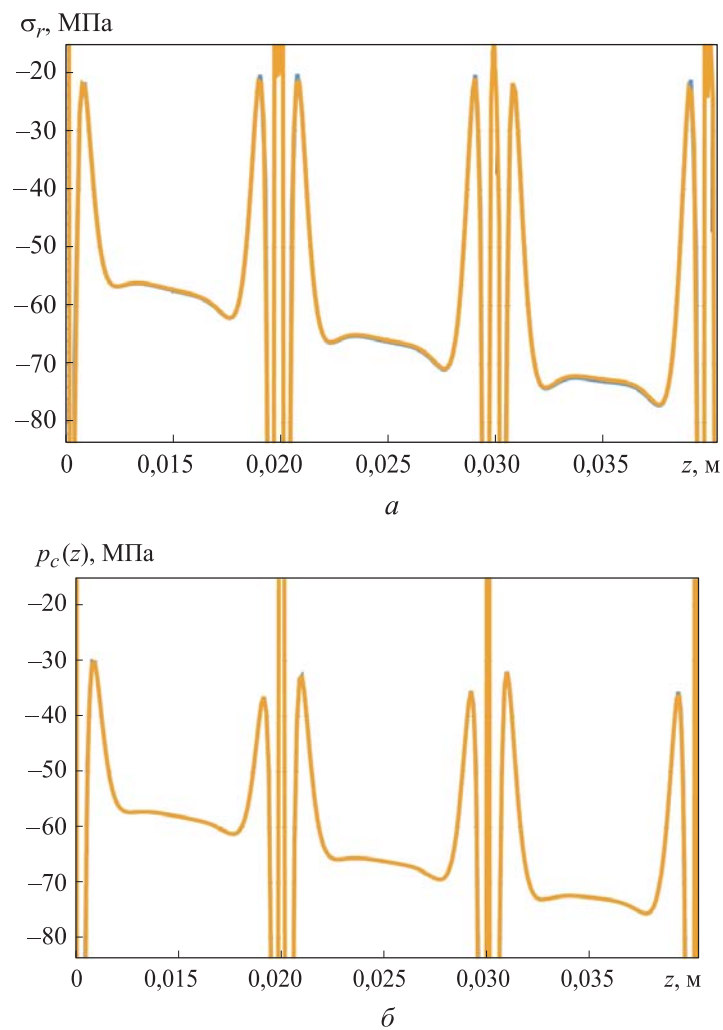
—, — mortar-метод и МДО, таблетка;  
 —, — mortar-метод и МДО, оболочка



**Рис. 5.** Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  и контактного давления  $p_c(z)$  в узлах сетки на внешней поверхности таблеток ( $S_4$ ):

— mortar-метод; — МДО

ных напряжений) выполнено достаточно аккуратно, несмотря на несогласованные сетки. Кинематические условия (равенство нормальных перемещений) также соблюдаются с высокой точностью для обоих методов. Наибольшие отличия наблюдаются вблизи фасок, где расположены концентраторы напряжений, поэтому получаемые результаты очень чувствительны к сетке.



**Рис. 6.** Зависимость радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  в узлах сетки (mortar-метод) на внешней поверхности таблеток ( $S_4$ ) и на внутренней поверхности оболочки ( $S_2^N$ ) (а) и зависимость контактного давления  $p_c(z)$  в узлах сетки (МДО) на внешней поверхности ( $S_4$ ) таблеток и внутренней поверхности ( $S_2^N$ ) оболочки (б):

— таблетка; — оболочка

**Заключение.** Изложены математическая и вычислительная модели для задачи контактного взаимодействия тел в твэлах в осесимметричной термоупругой постановке. Расчетная область соответствовала 10 топливным таблеткам и участку оболочки. Изученная постановка включала в себя девять пар контактных поверхностей таблетка/таблетка и 10 пар контактных поверхностей таблетка/оболочка. Для численного решения тепловой и механической задач использован метод конечных элементов.

Для учета условий скольжения без трения на контактных поверхностях применены mortar-метод и МДО.

Выполнены два расчета с использованием указанных методов, проведен сравнительный анализ полученных результатов. Под действием температурного поля происходит выход из контакта большей части поверхностей торцов таблеток, а также существенное смещение топливного столба относительно начального положения и оболочки. Сравнение зависимостей радиальных и осевых перемещений, а также контактных давлений показало, что оба метода дали достаточно близкие количественные характеристики напряженно-деформированного состояния системы тел. Некоторые отличия наблюдались в основном вблизи концентраторов напряжений, для которых значения величин очень чувствительны к используемой сетке. Сходство полученных результатов служит показателем корректности решенной мультиконтактной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Babuška I. The finite element method with penalty. *Math. Comp.*, 1973, vol. 27, no. 122, pp. 221–228. DOI: <https://doi.org/10.2307/2005611>
- [2] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach. *Math. Comp.*, 1995, vol. 64, iss. 212, pp. 1367–1396. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1995-1308457-5>
- [3] Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В. и др. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2015, № 89. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>
- [4] Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, спец. вып. «Прикладная математика», 2011, с. 134–141.
- [5] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И. и др. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 12 (681), с. 9–20. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2016-12-9-20>
- [6] Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [7] Lamichhane B.P. Higher order mortar finite elements with dual Lagrange multiplier spaces and applications. Universität Stuttgart, 2006.
- [8] Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithms and theory. *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 34. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1007/b137868>



- [9] Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 8, pp. 1103–1118. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202503002830>
- [10] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [11] Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., Изд-во Ленинградского ун-та, 1978.
- [12] Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 38, iss. 3, pp. 989–1012. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142999350929>
- [13] Аронов П.С., Родин А.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с криволинейными границами на несогласованных сетках. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2019, № 87. 27 с. DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-87>
- [14] Станкевич И.В., Аронов П.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода. *Математика и математическое моделирование*, 2018, № 3, с. 26–44. DOI: <https://doi.org/10.24108/mathm.0318.0000112>
- [15] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact interaction of fuel elements using the mortar method. *Mathematica Montisnigri*, 2020, vol. XLVIII, pp. 43–57. DOI: <http://doi.org/10.20948/mathmontis-2020-48-5>
- [16] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1989.

**Аронов Павел Сергеевич** — лаборант ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1).

**Галанин Михаил Павлович** — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1).

**Родин Александр Сергеевич** — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 3 (96), с. 4–22. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-4-22>

---

**NUMERICAL SOLUTION TO THE CONTACT INTERACTION  
PROBLEM OF NUCLEAR FUEL ELEMENT COMPONENTS USING  
THE MORTAR METHOD AND THE DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD**

**P.S. Aronov**<sup>1,2</sup>

**M.P. Galanin**<sup>1,2</sup>

**A.S. Rodin**<sup>1,2</sup>

aronovps@mail.ru

galan@keldysh.ru

rals@bk.ru

<sup>1</sup>**Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation**

<sup>2</sup>**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The paper presents algorithms for solving axisymmetric contact interaction problems for several thermoelastic bodies using unmatched meshes. We employed the finite element method to obtain numerical solutions to problems of thermal conductivity and the theory of elasticity. We took contact interaction into account by applying the mortar method and the method of domain decomposition. The mortar method requires solving an ill-conditioned system of linear algebraic equations with a zero block at the main diagonal. To solve it numerically, we used a modified method of successive over-relaxation (MSSOR), which makes it possible to reduce solving the system of equations for all contacting bodies to sequentially solving systems of equations for each body separately. We showcase our algorithm results by solving an example problem simulating thermomechanical processes in a nuclear fuel element. We analyse the features of the stress-strain state in the structure and compare the results obtained using the mortar method and the domain decomposition method. The computational domain in the problem considered consisted of 10 nuclear fuel pellets and a cladding section. The analysis results showed that the quantitative stress-strain state properties in a system of bodies obtained by the two methods are quite close to each other. This confirms the fact that these algorithms may be correctly applied to solving similar problems

**Keywords**

*Contact problem of elasticity theory, finite element method, mortar method, domain decomposition method, nuclear fuel element*

Received 26.09.2020

Accepted 26.10.2020

© Author(s), 2021

---

*The study was partially supported by Russian Foundation for Basic Research (RFBR projects no. 18-01-00252 and no. 18-31-20020)*

## REFERENCES

- [1] Babuška I. The finite element method with penalty. *Math. Comp.*, 1973, vol. 27, no. 122, pp. 221–228. DOI: <https://doi.org/10.2307/2005611>
- [2] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach. *Math. Comp.*, 1995, vol. 64, iss. 212, pp. 1367–1396. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1995-1308457-5>
- [3] Galanin M.P., Gliznitsina P.V., Lukin V.V., et al. Lagrange multiplier method implementations for two-dimensional contact problems. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], 2015, no. 89, 27 p. (in Russ.). Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>
- [4] Stankevich I.V., Yakovlev M.E., Si Tu Khtet. Development of contact interaction algorithm on the basis of Schwarz alternating method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences, Spec. iss. Applied Mathematics*, 2011, pp. 134–141 (in Russ.).
- [5] Galanin M.P., Krupkin A.V., Kuznetsov V.I., et al. Modeling of contact interaction of a thermoelastic body system using Schwarz method for a multidimensional case. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2016, no. 12 (681), pp. 9–20 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2016-12-9-20>
- [6] Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [7] Lamichhane B.P. *Higher order mortar finite elements with dual Lagrange multiplier spaces and applications*. Universität Stuttgart, 2006.
- [8] Toselli A., Widlund O. *Domain decomposition methods — algorithms and theory*. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 34. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1007/b137868>
- [9] Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 8, pp. 1103–1118. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202503002830>
- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of continuous medium mechanics and electro-dynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.
- [11] Rozin L.A. *Variatsionnye postanovki zadach dlya uprugikh system* [Variational formulation of problems for elastic systems]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1978.
- [12] Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 38, iss. 3, pp. 989–1012. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142999350929>
- [13] Aronov P.S., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact problem for two elastic bodies with curvilinear boundaries on mismatched grids. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], 2019, no. 87, 27 p. (in Russ.). DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-87>

- [14] Stankevich I.V., Aronov P.S. Mathematical modeling mortar-method of contact interaction between two elastic bodies. *Mathematics and Mathematical Modeling*, 2018, no. 3, pp. 26–44 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.24108/mathm.0318.0000112>
- [15] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact interaction of fuel elements using the mortar method. *Mathematica Montisnigri*, 2020, vol. XLVIII, pp. 43–57. DOI: <http://doi.org/10.20948/mathmontis-2020-48-5>
- [16] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki [Methods of computational mathematics]*. Moscow, Nauka Publ., 1989.

**Aronov P.S.** — Laboratory Assistant, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Galanin M.P.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Rodin A.S.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Numerical solution to the contact interaction problem of nuclear fuel element components using the mortar method and the domain decomposition method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 3 (96), pp. 4–22 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-4-22>