

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА LS-STAG ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ 4:1

И.К. Марчевский<sup>1,2</sup>

iliamarchevsky@bmstu.ru

В.В. Пузикова<sup>2</sup>

vvp@dms-at.ru

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> ИСП РАН, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Разработана модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей, описываемых линейными и квазилинейными моделями скоростного типа. Данный численный метод реализован в разрабатываемом авторами программном комплексе для моделирования течений вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG. Программный комплекс позволяет проводить расчеты течений вязкоупругих жидкостей, описываемых моделями Максвелла, Джеффри, Джонсона — Сигельмана, Максвелла-А, Олдройда-Б, Олдройда-А, верхней конвективной моделью Максвелла. Описано построение дискретных аналогов конвективных производных (Олдройда, Коттера — Ривлина, Яумана — Зарембы — Нолла). К трем разнесенным сеткам базового метода LS-STAG добавлена четвертая сетка, ячейки которой являются контрольными объемами для построения дискретного аналога уравнения для расчета касательных неньютоновских вязкоупругих напряжений. В результате нормальные вязкоупругие напряжения вычисляются в центрах ячеек основной сетки, а касательные — в их углах. Интегрирование по времени получающейся после LS-STAG-дискретизации дифференциально-алгебраической системы проводится с помощью метода, основанного на схеме предиктор–корректор первого порядка. Рассмотрена модельная задача о плоском течении вязкоупругой жидкости, описываемой моделью Олдройда-Б, в канале с внезапным сужением 4:1. Определено предельное значение числа Вайсенберга. Результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с приведенными в литературе данными

### Ключевые слова

*Метод погруженных границ, метод LS-STAG, вязкоупругая жидкость скоростного типа, несжимаемая среда, канал с внезапным сужением, конвективная производная*

Поступила 18.08.2020

Принята 15.09.2020

© Автор(ы), 2021

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект РФФ № 17-79-20445)*

**Введение.** Описание многих промышленных процессов, например литьевого формования, требует рассмотрения течений неньютоновских вязкоупругих [1, 2] полимеров в областях сложной формы. Для оптимизации подобных процессов требуется высокая точность моделирования течения; численные методы решения такого типа задач активно разрабатываются. Одним из основных вопросов является проблема моделирования течений, характеризуемых высоким значением числа Вайсенберга (high Weissenberg number problem, HWNP), заключающаяся в отсутствии сходимости для таких течений. Как показывает практика, ее решение осложняется тем, что предельное значение числа Вайсенберга весьма чувствительно к выбору способа дискретизации уравнений [3].

Метод погруженных границ [4] LS-STAG [5] с функциями уровня [6] позволяет снизить вычислительные затраты на выполнение моделирования в областях сложной формы. Метод LS-STAG и его модификации могут быть применимы к решению широкого класса задач, включая сопряженные задачи гидроупругости [7]. Разработана также модификация метода LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей в случае неподвижных погруженных границ [8, 9]. Этот метод реализован в разрабатываемом авторами программном комплексе [8].

*Цель работы* — верификация созданной модификации метода LS-STAG для расчета течений вязкоупругих жидкостей, описываемых моделями скоростного типа. Модельная задача о плоском течении в канале с внезапным сужением 4:1 часто используется для тестирования алгоритмов, поскольку в области резкого изменения формы канала наблюдаются высокие уровни напряжений. Это означает, что такая задача хорошо подходит для оценки критического значения числа Вайсенберга, характерного для тестируемого численного метода. Кроме того, подобная конфигурация области широко распространена в технологии формования полимерных изделий на этапах транспортировки.

**Постановка тестовой задачи.** Плоское течение вязкоупругой несжимаемой жидкости в канале с внезапным сужением 4:1 рассматривается в прямоугольной расчетной области  $\Omega = [0; 32D] \times [0; 8D]$  (рис. 1). Расстояние от входной границы до сужения  $16D$ . В безразмерных переменных постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^e, \quad \boldsymbol{\tau}^e + \lambda \tilde{D} \boldsymbol{\tau}^e = 2\nu_e (\mathbf{S} + \lambda_r \tilde{D} \mathbf{S}); \\ \mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{v}_0(x, y), \quad \boldsymbol{\tau}^e(x, y, 0) = \boldsymbol{\tau}_0^e(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}|_{\Gamma_2} = \mathbf{V}_{inflow} &= \frac{3V_\infty}{8} \frac{y}{4D} \left( 8D - \frac{y}{4D} \right) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}|_{\Gamma_3} = \mathbf{v}|_K = \mathbf{0}, \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} &= \mathbf{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma \cup K} = 0; \\
\boldsymbol{\tau}^e \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} &= \boldsymbol{\tau}^{e, bc}(x, y, t), \quad \tau_{xx}^{e, bc} = 2\lambda v_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\
\tau_{yy}^{e, bc} &= 0, \quad \tau_{xy}^{e, bc} = v_e \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \boldsymbol{\tau}^e \Big|_K = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^e}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  — время;  $x, y$  — координаты;  $p$  — давление;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе области течения  $K = K_1 \cup K_2$ ;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = u \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_y$  — скорость;  $Re$  — число Рейнольдса;  $v_e$  — вязкость вязкоупругой составляющей;  $\lambda_r$  — время запаздывания;  $\lambda$  — время релаксации;  $\boldsymbol{\tau}^e$  — вязкоупругая составляющая тензора напряжений [10];  $\mathbf{S} = (\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T) / 2$  — тензор скоростей деформации;  $\tilde{D}$  — оператор дифференцирования по времени. Модель скоростного типа определяется видом оператора  $\tilde{D}$  и значением  $\lambda_r$ . Так, если под дифференцированием по времени подразумевается частная производная по времени, то в зависимости от наличия константы  $\lambda_r$  получаем линейные модели Максвелла [11] и Джеффри [12]. Если при дифференцировании по времени используются конвективные производные [2], то получаем квазилинейные модели. Так, в верхней конвективной модели Максвелла [11] и в модели Олдройда-Б [13] задействована верхняя конвективная производная

$$\tilde{D}X = \overset{\nabla}{X} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)X - X(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T X; \tag{2}$$

в модели Максвелла-А [11] и в модели Олдройда-А [13] — нижняя

$$\tilde{D}X = \overset{\Delta}{X} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)X + X(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T X; \tag{3}$$

в модели Джонсона — Сигельмана [14] — вращательная

$$\tilde{D}X = \overset{\circ}{X} = \frac{1}{2} \left( \overset{\nabla}{X} + \overset{\Delta}{X} \right).$$

Далее будет рассматриваться жидкость Олдройда-Б, так как для нее все константы отличны от нуля и в конвективной производной присутствуют все члены.

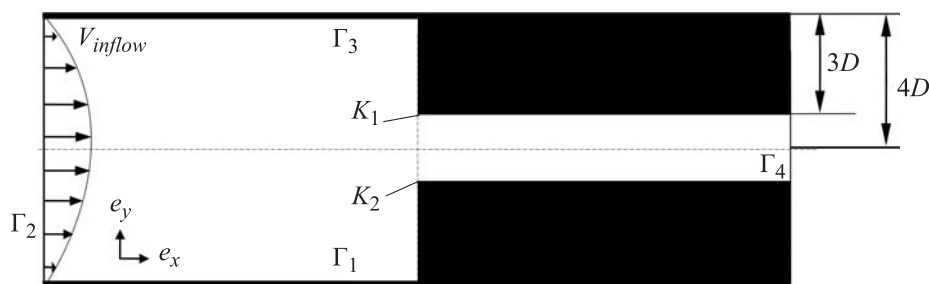


Рис. 1. Расчетная область

**Модификация LS-STAG-сетки.** В области  $\Omega$  строим «основную» прямоугольную сетку с ячейками  $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ , площади которых равны  $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$ . Центрам ячеек соответствуют радиус-векторы  $\mathbf{x}_{i,j}^c = (x_i^c, y_j^c)$ . Границы этих ячеек обозначим  $\Gamma_{i,j}$  (рис. 2). Контрольный объем  $\Omega_{i,j}$  используется для построения дискретных аналогов уравнения неразрывности и уравнений для нормальных неньютоновских вязкоупругих напряжений. Для построения дискретных аналогов уравнения импульса в проекциях на  $Ox$  и  $Oy$  используются контрольные объемы  $\Omega_{i,j}^u = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_j, y_{j+1})$  и  $\Omega_{i,j}^v = (x_{i-1}, x_i) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$  с границами  $\Gamma_{i,j}^u$  и  $\Gamma_{i,j}^v$

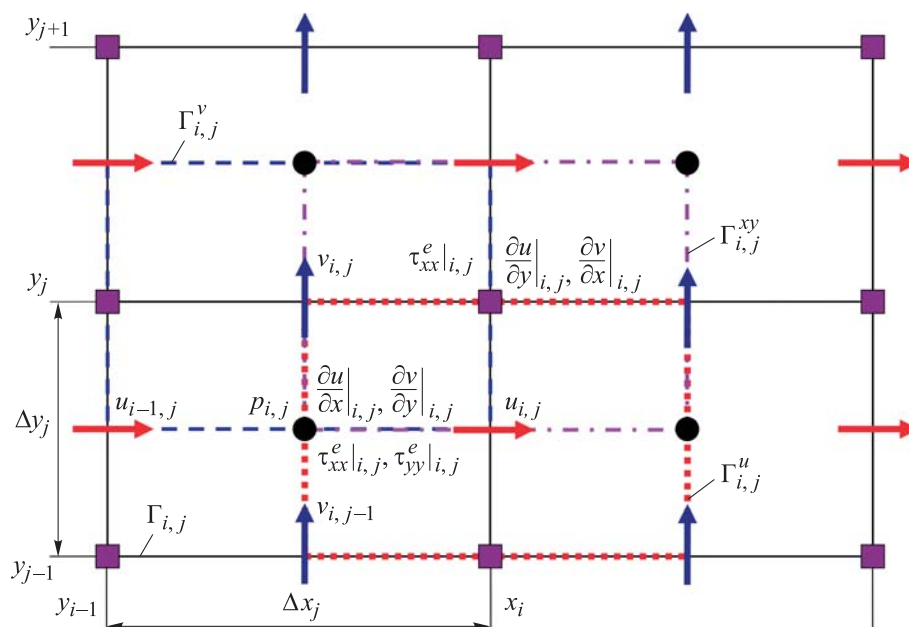


Рис. 2. Разнесенные сетки

(см. рис. 2). Кроме того, для расчета касательных вязкоупругих напряжений необходимо рассмотреть контрольные объемы  $\Omega_{i,j}^{xy} = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}^c, y_j^c)$ , которые в результате составят дополнительную сетку, называемую *ху-сеткой*. Если каждой ячейке  $\Omega_{i,j}$  «основной» сетки присвоить вес

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — твердая ячейка,} \\ 1/3, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — треугольная ячейка,} \\ 1/4 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4)$$

то площадь ячейки  $\Omega_{i,j}^{xy}$  можно будет вычислять по формуле  $M_{i,j}^{xy} = \alpha_{i,j-1}V_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j}V_{i-1,j} + \alpha_{i,j}V_{i,j} + \alpha_{i,j+1}V_{i,j+1}$ .

Граница  $\Gamma^{ib}$  твердого тела  $\Omega^{ib}$ , форма которого в общем случае может быть произвольной, задается функцией расстояния (функцией уровня)  $\phi(\mathbf{r})$  [6]:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) < 0, & \quad \mathbf{r} \in \Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}, \\ \phi(\mathbf{r}) = 0, & \quad \mathbf{r} \in \Gamma^{ib}, \\ \phi(\mathbf{r}) > 0, & \quad \mathbf{r} \in \Omega^{ib}. \end{aligned}$$

Граница  $\Gamma_{i,j}^{ib}$  для всех усеченных ячеек  $\Omega_{i,j}$  LS-STAG-сетки аппроксимируется отрезком прямой. Для определения координат концов каждого такого отрезка используется линейная интерполяция значений функции уровня  $\phi(x_i, y_j)$ . Коэффициенты заполнения ячеек  $\vartheta_{i,j}^u, \vartheta_{i,j}^v \in [0,1]$  соответствуют доле жидкости на восточной и северной границах ячейки и позволяют однозначно идентифицировать тип усеченной ячейки. Отметим, что при решении плоских задач существует всего три типа усеченных ячеек: 1) трапециевидные; 2) треугольные; 3) пятиугольные ячейки. При этом принадлежность ячейки той или иной группе однозначно определяет местоположение точек вычисления неизвестных (рис. 3).

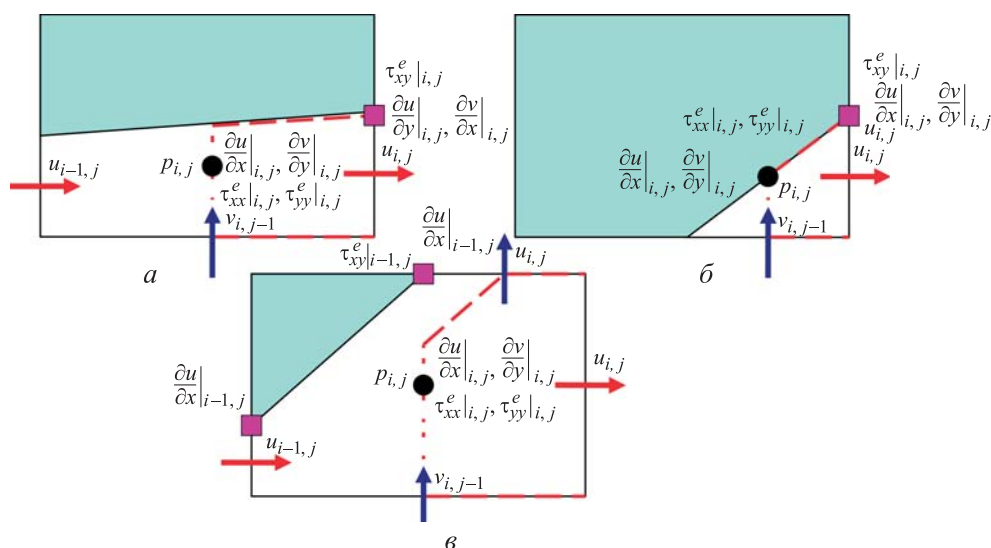
**Построение дискретных аналогов конвективных производных.** Верхняя (2) и нижняя (3) конвективные производные тензора

$$X = \begin{pmatrix} X_{xx} & X_{xy} \\ X_{xy} & X_{yy} \end{pmatrix}$$

содержат слагаемые

$$X(\nabla \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} X_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & X_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + X_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \\ X_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} & X_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + X_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$(\nabla \mathbf{v})^T X = \begin{pmatrix} X_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & X_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ X_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + X_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} & X_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + X_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}.$$



**Рис. 3.** Северная трапециевидная ячейка (а), северо-западная треугольная ячейка (б) и северо-западная пятиугольная ячейка (в) LS-STAG-сетки с отмеченными точками вычисления неизвестных

С учетом уравнения неразрывности получаем

$$X(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T X = \begin{pmatrix} 2 \left( X_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + X_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) & X_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + X_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ X_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + X_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \left( X_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + X_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{xx} & Y_{xy} \\ Y_{xy} & Y_{yy} \end{pmatrix}.$$

Дискретные аналоги нормальных  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}|_{i,j}$  и касательных напряжений  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{i,j}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}|_{i,j}$ , необходимые, в частности, для вычисления компонент тензора скоростей деформации, построены в [8, 9] для всех типов ячеек LS-STAG-сетки. Значения  $X_{xx}$ ,  $X_{yy}$ ,  $Y_{xx}$  и  $Y_{yy}$ , как и нормальные напряжения, вычисляются на «основной» сетке, а  $X_{xy}$  и  $Y_{xy}$ , как и касательные напряжения, вычисляются на «основной» сетке.

тельные напряжения, — на дополнительной  $xy$ -сетке. Поэтому при вычислении  $Y_{xx}$  и  $Y_{yy}$  следует использовать средние по  $\Omega_{i,j}$  значения  $X_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}$  и  $X_{xy} \frac{\partial v}{\partial x}$ , которые обозначим  $\left\langle X_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{i,j}$  и  $\left\langle X_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{i,j}$ . С учетом (4) среднее по  $\Omega_{i,j}$  значение величины  $w$  с  $xy$ -сетки равно

$$\langle w \rangle_{i,j} = \alpha_{i,j}(w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}).$$

При этом на усеченных ячейках  $\Omega_{i,j}$  часть значений  $w_{i,j-1}$ ,  $w_{i-1,j}$ ,  $w_{i,j}$ ,  $w_{i-1,j-1}$  берется из граничных условий. При интегрировании  $Y_{xy}$  необходимо учитывать различие в сетках:

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} Y_{xy} dV = \left\langle X_{xx} \right\rangle_{i,j}^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} + \left\langle X_{yy} \right\rangle_{i,j}^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}.$$

Эта формула выполняется для всех типов ячеек  $\Omega_{i,j}^{xy}$ . Здесь  $\left\langle X_{xx} \right\rangle_{i,j}^{xy}$ ,  $\left\langle X_{yy} \right\rangle_{i,j}^{xy}$  — средние по  $\Omega_{i,j}^{xy}$  значения  $X_{xx}$  и  $X_{yy}$ . С использованием (4) среднее по  $\Omega_{i,j}^{xy}$  значение величины  $z$  с «основной» сетки вычисляется следующим образом:

$$\langle z \rangle_{i,j}^{xy} = \alpha_{i,j} V_{i,j} z_{i,j} + \alpha_{i,j-1} V_{i,j-1} z_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j} V_{i-1,j} z_{i-1,j} + \alpha_{i-1,j-1} V_{i-1,j-1} z_{i-1,j-1}.$$

Кроме того, для квазилинейных моделей вязкоупругих жидкостей необходимо построить дискретные аналоги интегралов от слагаемых  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)X$ , входящих во все конвективные производные. Для уравнений импульса дискретизация конвективных членов приводила к кососимметричным матрицам [5] вследствие использования центральных разностей. Однако рассматриваемые уравнения переноса вязкоупругих напряжений являются гиперболическими, поэтому использование центральных разностей при построении дискретного аналога конвективного члена приведет к вычислительной неустойчивости [15]. Возможным решением указанной проблемы является использование направленных разностей против потока [15].

Для  $X_{xy}$  с учетом формулы Остроградского — Гаусса получаем

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) X_{xy} dV = \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} X_{xy} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Для заполненной жидкостью ячейки  $\Omega_{i,j}^{xy}$  имеем

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) X_{xy} dS \approx C_e^{xy} [\bar{U}]_W(i, j) X_{xy} |_{i-1, j} + C_e^{xy} [\bar{U}]_E(i, j) X_{xy} |_{i+1, j} + C_e^{xy} [\bar{U}]_P(i, j) X_{xy} |_{i, j} + C_e^{xy} [\bar{U}]_S(i, j) X_{xy} |_{i, j-1} + C_e^{xy} [\bar{U}]_N(i, j) X_{xy} |_{i, j+1}. \quad (5)$$

Для  $\Omega_{i,j}^{xy}$  (рис. 4) конвективный член можно записать как сумму потоков через четыре ее элементарные грани:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) X_{xy} dS = - \int_{\Gamma_{i,j+1}^{se,w} \cup \Gamma_{i,j}^{ne,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) X_{xy} dy + \int_{\Gamma_{i+1,j+1}^{sw,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{nw,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) X_{xy} dy - \int_{\Gamma_{i,j}^{ne,s} \cup \Gamma_{i+1,j}^{nw,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) X_{xy} dx + \int_{\Gamma_{i,j+1}^{se,n} \cup \Gamma_{i+1,j+1}^{sw,n}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) X_{xy} dx. \quad (6)$$

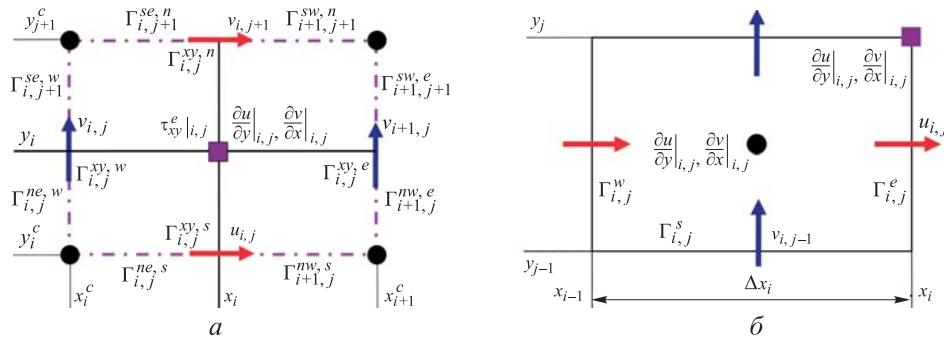


Рис. 4. Контрольный объем  $\Omega_{i,j}^{xy}$  (а) и ячейка  $\Omega_{i,j}$  «основной» сетки (б)

Поток массы через жидкую грань  $\Gamma_{i,j}^e$  (см. рис. 4) равен  $\bar{u}_{i,j} = \int_{\Gamma_{i,j}^e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_{y_{j-1}}^{y_j} u(x_i, y) dy$ . Поскольку точка вычисления  $u_{i,j}$  располагается в центре жидкой части грани (см. рис. 3), имеем  $u_{i,j} \equiv u \left( x_i, y_{j-1} + \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{i,j}^u \Delta y_j \right)$ . Применяя квадратурную формулу центральных прямоугольников, получаем  $\bar{u}_{i,j} \approx \mathfrak{S}_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}$ . Разностный аналог потока, относящегося к твердой грани, имеет вид

$$\bar{U}_{i,j}^{ib} \approx u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} + v_{i,j}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib}.$$



Здесь  $[n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\mathfrak{Q}_{i-1,j}^u - \mathfrak{Q}_{i,j}^u) \Delta y_j$ ;  $[n_y \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\mathfrak{Q}_{i,j-1}^v - \mathfrak{Q}_{i,j}^v) \Delta x_i$ ; скорость  $\mathbf{v}_{i,j}^{ib} = (u_{i,j}^{ib}, v_{i,j}^{ib})$  на  $\Gamma_{i,j}^{ib}$  вычисляется на усеченной ячейке в концах отрезка  $\Gamma_{i,j}^{ib}$  по граничным условиям. Тогда разностный аналог (6) можно вычислить по формуле:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) X_{xy} dS \approx -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j}}{2} + \frac{\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i-1,j+1}}{2} \right) [X_{xy}]_{i,j}^w +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j}}{2} + \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} + \bar{u}_{i,j+1}}{2} \right) [X_{xy}]_{i,j}^e -$$

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i,j}}{2} + \frac{\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i+1,j-1}}{2} \right) [X_{xy}]_{i,j}^s +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1}}{2} + \frac{\bar{v}_{i+1,j+1} + \bar{v}_{i+1,j}}{2} \right) [X_{xy}]_{i,j}^n, \quad (7)$$

$$[X_{xy}]_{i,j}^w = \frac{1 + \operatorname{sgn}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i-1,j+1} + \bar{u}_{i,j+1})}{2} X_{xy} |_{i-1,j} +$$

$$+ \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i-1,j+1} + \bar{u}_{i,j+1})}{2} X_{xy} |_{i,j},$$

$$[X_{xy}]_{i,j}^e = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j+1} + \bar{u}_{i,j+1})}{2} X_{xy} |_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{1 + \operatorname{sgn}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j+1} + \bar{u}_{i,j+1})}{2} X_{xy} |_{i,j},$$

$$[X_{xy}]_{i,j}^s = \frac{1 + \operatorname{sgn}(\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i+1,j-1} + \bar{v}_{i+1,j})}{2} X_{xy} |_{i,j-1} +$$

$$+ \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i+1,j-1} + \bar{v}_{i+1,j})}{2} X_{xy} |_{i,j},$$

$$[X_{xy}]_{i,j}^n = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i+1,j+1} + \bar{v}_{i+1,j})}{2} X_{xy} |_{i,j+1} +$$

$$+ \frac{1 + \operatorname{sgn}(\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i+1,j+1} + \bar{v}_{i+1,j})}{2} X_{xy} |_{i,j}.$$

Сравнивая (7) и (5), получаем формулы для вычисления элементов  $C_e^{xy}[\bar{U}]$ , например:

$$C_e^{xy}[\bar{U}]_W(i, j) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j}}{2} + \frac{\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i-1,j+1}}{2} \right) \frac{1 + \operatorname{sgn}(\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i-1,j+1})}{2}.$$

Для усеченных ячеек в формулах следует учитывать значения  $\mathbf{v}^{ib}(x, y)$  и потоков  $\bar{U}_{i,j}^{ib}$  по аналогии со случаем ньютоновской жидкости [5].

Для компонент  $X_{xx}$  и  $X_{xy}$  разностные аналоги конвективных членов должны строиться по другим формулам, поскольку в отличие от  $X_{xy}$  эти компоненты вычисляются на «основной» сетке. Построим разностный аналог интегралов величины  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)z$  для  $z$  с «основной» сетки. С учетом формулы Остроградского — Гаусса  $\int_{\Omega_{i,j}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})z dV = \int_{\Gamma_{i,j}} z\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ .

Для заполненной жидкостью ячейки  $\Omega_{i,j}$  имеем

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})z dS \approx C_e[\bar{U}]_W(i, j)z_{i-1,j} + C_e[\bar{U}]_E(i, j)z_{i+1,j} + C_e[\bar{U}]_P(i, j)z_{i,j} + C_e[\bar{U}]_S(i, j)z_{i,j-1} + C_e[\bar{U}]_N(i, j)z_{i,j+1}. \quad (8)$$

Для  $\Omega_{i,j}$  (см. рис. 4) дискретизация состоит в записи конвективного члена как суммы потоков через четыре его элементарные грани:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})z dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^W} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x)z dy + \int_{\Gamma_{i,j}^E} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x)z dy - \int_{\Gamma_{i,j}^S} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y)z dx + \int_{\Gamma_{i,j}^N} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y)z dx. \quad (9)$$

Тогда разностный аналог (9) можно вычислить по формуле

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})z dS \approx -\bar{u}_{i-1,j}\{z\}_{i,j}^W + \bar{u}_{i,j}\{z\}_{i,j}^E - \bar{v}_{i,j-1}\{z\}_{i,j}^S + \bar{v}_{i,j}\{z\}_{i,j}^N, \quad (10)$$

$$\{z\}_{i,j}^E = \{z\}_{i+1,j}^W, \quad \{z\}_{i,j}^N = \{z\}_{i,j+1}^S,$$

$$\{z\}_{i,j}^W = \frac{1 + \operatorname{sgn} \bar{u}_{i-1,j}}{2} z_{i-1,j} + \frac{1 - \operatorname{sgn} \bar{u}_{i-1,j}}{2} z_{i,j},$$

$$\{z\}_{i,j}^S = \frac{1 + \operatorname{sgn} \bar{v}_{i,j-1}}{2} z_{i,j-1} + \frac{1 - \operatorname{sgn} \bar{v}_{i,j-1}}{2} z_{i,j}.$$

Сравнивая (10) и (8), получаем формулы для  $C_e[\bar{U}]$ , например  $C_e[\bar{U}]_W(i, j) = -\{u\}_{i,j}^W$ .

**Интегрирование по времени.** После построения описанных дискретных аналогов имеем дифференциально-алгебраическую систему, которую необходимо численно проинтегрировать по времени. Для этого

построим метод на основе схемы предиктор–корректор первого порядка точности. Шаг предиктора заключается в решении разностного аналога уравнения Гельмгольца для прогноза скорости  $\tilde{U}$  в момент времени:

$$\frac{M(\tilde{U} - U^n)}{\Delta t} + C[\bar{U}^n]U^n + S^{ib,c,n} - D^T(P^n - T_{norm}^{e,n}) - \\ - D^T T_{xy}^{e,n} - \frac{1}{Re}(K\tilde{U} + S^{ib,v}) = 0.$$

Здесь  $P^n$  — вектор, состоящий из значений  $p_{i,j}^n$ ,  $n$  — верхний индекс, указывающий на принадлежность к моменту времени  $t_n = n\Delta t$ ;  $T_{norm}^{e,n}$  — вектор с компонентами  $\tau_{xx}^e|_{i,j}^n$  и  $\tau_{yy}^e|_{i,j}^n$ ;  $T_{xy}^{e,n}$  — вектор, состоящий из  $\tau_{xy}^e|_{i,j}^n$ ;  $C[\bar{U}]$  и  $K$  — матрицы, полученные в результате построения дискретных аналогов конвективных и вязких потоков;  $U^n$  — вектор с компонентами  $u_{i,j}^n$  и  $v_{i,j}^n$ ;  $S^{ib,c,n}$  и  $S^{ib,v}$  — векторы, соответствующие источниковым членам, которые появляются вследствие граничных условий;  $M$  — диагональная матрица, формируемая из значений площадей ячеек  $\Omega_{i,j}^u$  и  $\Omega_{i,j}^v$ ;  $-D^T$  — матрица, возникающая в результате построения дискретного аналога оператора градиента;  $D^T$  — матрица, которая соответствует дискретному аналогу оператора дивергенции, построенному на  $xu$ -сетке.

Шаг корректора соответствует решению разностного аналога уравнения Пуассона:

$$A\Phi = D\tilde{U} + \bar{U}^{ib,n+1}, \quad A = -DM^{-1}D^T.$$

В результате становится возможным вычислить скорости и давление при  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ :

$$U^{n+1} = \tilde{U} + M^{-1}D^T\Phi, \quad P^{n+1} = P^n + (\Phi / \Delta t).$$

Затем выполняется расчет вязкоупругих напряжений:

$$M_e T^{e,n+1} + \lambda \frac{M_e(T^{e,n+1} - T^{e,n})}{\Delta t} = \\ = 2\nu_e M_e S^{n+1} + \frac{2\nu_e \lambda_r M_e (S^{n+1} - S^n)}{\Delta t} + CD(\bar{U}^{n+1}, X^n).$$

Здесь  $M_e$  — диагональная матрица, формируемая из значений площадей ячеек  $\Omega_{i,j}$  и  $\Omega_{i,j}^{xy}$ ;  $S$  — вектор, составленный из значений компонент тен-

зора скоростей деформации в соответствующих точках;  $X^n = 2v_e\lambda_r S^{n+1} - \lambda T^{e,n}$ ;  $CD(\bar{U}^{n+1}, X^n)$  соответствует дискретному аналогу конвективной производной  $X^n$ , из которой вычтена частная производная по времени.

**Вычислительные эксперименты.** При решении задачи (1) полагаем, что характерный размер  $D = 1$ , характерная скорость  $V_\infty = 1$ . Тогда имеем

$$We = \frac{\lambda V_\infty}{D} = \lambda, \quad Re = \frac{V_\infty D}{\nu} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_s + \nu_e} = \frac{\beta}{\nu_s}.$$

Здесь  $We$  — число Вайсенберга;  $\nu_s$  — вязкость ньютоновской жидкости-растворителя;  $\beta = 1/9$  — доля вязкости растворителя. Таким образом,

$$\nu_e = \frac{1-\beta}{Re} \quad \text{и} \quad \lambda_r = \beta We.$$

Расчеты проводились на двух неравномерных сетках размерами  $96 \times 88$  и  $192 \times 176$ , которые далее обозначим  $M1$  и  $M2$  соответственно. Обе сетки содержат 39,2 % твердых ячеек. В окрестности углов используются блоки равномерной сетки с шагом  $h$  (рис. 5).

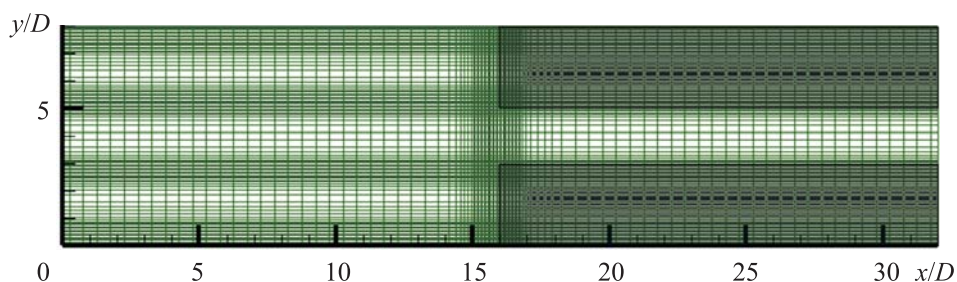


Рис. 5. Неравномерная сетка  $M1$  (твердые ячейки показаны серым цветом)

Результаты сравнения предельных значений  $We_{cr}$  числа Вайсенберга, определенных при верификации модифицированного метода LS-STAG и указанных в работах [3, 16], в которых расчеты проводились с помощью различных реализаций метода конечных элементов (МКЭ), приведены в табл. 1. Для всех методов и сеток указаны значения шагов по пространству и времени, поскольку при измельчении сетки значение  $We_{cr}$  может уменьшаться [3]. Во всех работах использовались неравномерные по пространству сетки, причем наиболее подробные блоки сеток применялись в окрестности угла, выступающего в месте сужения. Это вызвано тем, что численная неустойчивость при расчете высоковязких течений связана именно с этой особенностью области. Поэтому в табл. 1 представлены

значения  $h/D$ , используемые в окрестности этой точки. При расчетах течений, характеризующихся значением числа Рейнольдса меньше единицы, наиболее высокое значение  $We_{cr}$  демонстрирует метод, используемый в [16]. Однако при увеличении числа  $Re$  значение  $We_{cr}$  для этого метода начинает уменьшаться, в то время как для метода LS-STAG оно остается без изменений.

Таблица 1

Результаты сравнения предельных значений числа Вайсенберга

Параметр	Сетка			
	$M1$	$M2$	UM3 [3]	Mesh III [16]
$h/D$	0,06250	0,03125	0,00500	0,01500
$\Delta t$	0,00500	0,00500	0,00050	0,00100
$We_{cr} (Re < 1)$	3,00000	3,00000	2,50000	3,60000
$We_{cr} (Re \geq 1)$	3,00000	3,00000	–	2,50000

Результаты измерения длины вихря  $L$ , образующегося в углу области перед сужением (рис. 6), представлены в табл. 2. Расчеты проводились в диапазоне чисел Вайсенберга 0–3 и при значениях числа Рейнольдса 0,010; 0,100 и 1,000. В случаях когда значение  $L$  не определено в результате достижения  $We_{cr}$ , вместо числовых значений в соответствующих ячейках

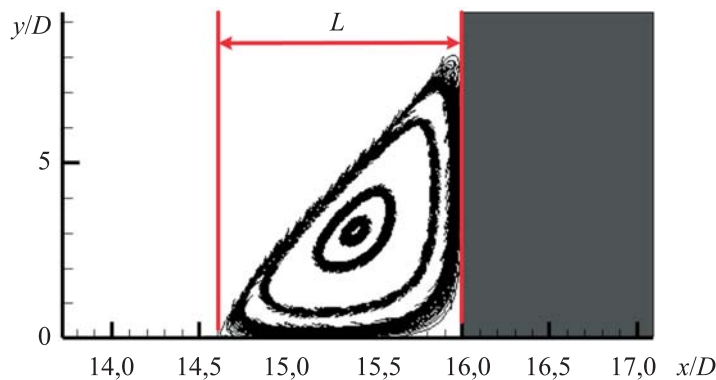


Рис. 6. Пример определения безразмерной длины вихря  $L$  на сетке  $M1$  при  $We = 3,000$  и  $Re = 0,010$

табл. 2 указана аббревиатура HWNP. При значениях числа Вайсенберга, не превышающих 2,500, рассмотренные методы демонстрируют очень близкие результаты: разность результатов не превышает 3 %. Однако при значениях  $We$  от 2,500 и более разброс результатов сильно увеличивается и в рассмотренных случаях составляет от 7 до 16 %. Однако модификация метода

LS-STAG позволяет смоделировать монотонное уменьшение значения  $L$  при увеличении числа  $We$ , о котором идет речь в [3], в то время как в [16] данный эффект не был воспроизведен. Это объясняется высокой схемной искусственной вязкостью используемого численного метода, которая сильно отражается на точности расчета при высоких значениях числа Вейсенберга.

Таблица 2

## Результаты сравнения безразмерной длины вихря

We	Re	LS-STAG		МКЭ	
		M1	M2	[3]	[16]
0	0,010	1,720	1,490	–	1,503
	0,100	1,660	1,450	1,448	–
	1,000	1,350	1,240	–	1,245
0,500	0,010	1,490	1,450	–	1,454
	0,100	1,360	1,340	1,339	–
	1,000	1,220	1,180	–	1,167
2,000	0,010	1,360	1,350	–	1,357
	0,100	1,120	1,100	1,073	–
	1,000	0,880	0,860	–	0,852
2,500	0,010	1,190	1,320	–	1,448
	0,100	0,800	0,900	0,966	–
	1,000	0,790	0,840	–	0,851
3,000	0,010	1,400	1,300	–	1,543
	0,100	0,820	0,840	HWNP	–
	1,000	0,780	0,830	–	HWNP

**Заключение.** Описаны основные особенности модификации метода погруженных границ LS-STAG. Такая модификация позволяет моделировать течения высоковязких жидкостей. Получены формулы для вычисления разностных аналогов верхней, нижней и вращательной производных. В целях верификации разработанного численного метода рассмотрена модельная задача о моделировании плоского течения жидкости Олдройда-Б в канале с внезапным сужением 4:1. Вычислительные эксперименты показали, что на этой задаче предельное значение числа Вейсенберга для разработанного численного метода равняется 3, что является хорошим показателем для теста. Кроме того, измеренные значения безразмерной длины смоделированного вихря хорошо согласуются с результатами расчетов, полученными другими авторами.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Owens R.G., Phillips T.N. Computational rheology. Imperial College Press, 2002.
- [2] Galdi G.P., Robertson A.M., Rannacher R., et al. Hemodynamical flows: modeling, analysis and simulation. Oberwolfach Seminars, vol. 37. Birkhäuser Basel, Springer, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7806-6>
- [3] Kim J.M., Kim C., Kim J.H., et al. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, 2005, no. 129, iss. 1, pp. 23–37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2005.04.007>
- [4] Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2005, vol. 37, pp. 239–261. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>
- [5] Chen Y., Botella O. The LS-STAG method: a new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. *J. Comput. Phys.*, 2010, vol. 229, iss. 4, pp. 1043–1076. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.10.007>
- [6] Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 153. New York, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/b98879>
- [7] Marchevsky I.K., Puzikova V.V. Numerical simulation of wind turbine rotors auto-rotation by using the modified LS-STAG immersed boundary method. *Int. J. Rotating Mach.*, 2017, vol. 2017, art. 6418108. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/6418108>
- [8] Пузикова В.В. Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей. *Труды ИСП РАН*, 2017, т. 29, № 1, с. 71–84. DOI: [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2017-29\(1\)-5](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5)
- [9] Botella O., Chen Y., Nikfarjam F., et al. Application of the LS-STAG immersed boundary/cut-cell method to viscoelastic flow computations. *Commun. Comput. Phys.*, 2016, vol. 20, iss. 4, pp. 870–901. DOI: <https://doi.org/10.4208/cicp.080615.010216a>
- [10] Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М., Мир, 1964.
- [11] Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1867, vol. 157, pp. 49–88. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
- [12] Jeffreys H. The Earth. Its origin, history and physical constitution. Cambridge Univ. Press, 1929.
- [13] Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, 1950, vol. 200, iss. 2063, pp. 523–541. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035>
- [14] Johnson M.W. Jr., Segalman D. A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, 1977, vol. 2, iss. 3, pp. 255–270. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(77\)80003-7](https://doi.org/10.1016/0377-0257(77)80003-7)
- [15] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир, 1980.



[16] Li X., Han X., Wang X. Numerical modeling of viscoelastic flows using equal low-order finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2010, vol. 199, iss. 9-12, pp. 570–581. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.10.010>

**Марчевский Илья Константинович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1); старший научный сотрудник ИСП РАН (Российская Федерация, 109004, Москва, ул. А. Солженицына, д. 25).

**Пузикова Валерия Валентиновна** — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИСП РАН (Российская Федерация, 109004, Москва, ул. А. Солженицына, д. 25).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Марчевский И.К., Пузикова В.В. Использование модифицированного метода LS-STAG для расчета плоского течения вязкоупругой жидкости в канале с внезапным сужением 4:1. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 3 (96), с. 46–63.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-46-63>

**THE MODIFIED LS-STAG METHOD APPLICATION  
FOR PLANAR VISCOELASTIC FLOW COMPUTATION  
IN A 4:1 CONTRACTION CHANNEL**

I.K. Marchevsky<sup>1,2</sup>  
V.V. Puzikova<sup>2</sup>

iliamarchevsky@bmstu.ru  
vvp@dms-at.ru

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for System Programming, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation

---

**Abstract**

In this study we present the modification of the LS-STAG immersed boundary cut-cell method. This modification is designed for viscoelastic fluids. Linear and quasilinear viscoelastic fluid models of a rate type are considered. The obtained numerical method is implemented in the LS-STAG software package developed by the author. This software is created for viscous incompressible flows simulation both by the LS-STAG method and by it developed modifications. Besides of this, the software package is designed to compute extra-stresses for viscoelastic Maxwell, Jeffreys, upper-convected Maxwell, Maxwell-A, Oldroyd-B, Oldroyd-A, Johnson — Segalman fluids on

**Keywords**

*Immersed boundary method, the LS-STAG method, rate type viscoelastic flow, incompressible flow, contraction channel, convective derivative*



the LS-STAG mesh. The construction of convective derivatives discrete analogues is described for Oldroyd, Cotter — Rivlin, Jaumann — Zaremba — Noll derivatives. The centers of base LS-STAG mesh cells are the locations for shear non-Newtonian stresses computation. The corners of these cells are the positions for normal non-Newtonian stresses computation. The first order predictor–corrector scheme is the basis for time-stepping numerical algorithm. Benchmark solutions for the planar flow of Oldroyd-B fluid in a 4:1 contraction channel are presented. A critical value of Weissenberg number is defined. Computational results are in good agreement with the data known in the literature

Received 18.08.2020

Accepted 15.09.2020

© Author(s), 2021

*This work was supported by the Russian Science Foundation (RSF project no. 17-79-20445)*

## REFERENCES

- [1] Owens R.G., Phillips T.N. Computational rheology. Imperial College Press, 2002.
- [2] Galdi G.P., Robertson A.M., Rannacher R., et al. Hemodynamical flows: modeling, analysis and simulation. Oberwolfach Seminars, vol. 37. Birkhäuser Basel, Springer, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7806-6>
- [3] Kim J.M., Kim C., Kim J.H., et al. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, 2005, iss. 129, no. 1, pp. 23–37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2005.04.007>
- [4] Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2005, vol. 37, pp. 239–261. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>
- [5] Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: a new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. *J. Comput. Phys.*, 2010, vol. 229, iss. 4, pp. 1043–1076. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.10.007>
- [6] Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 153. New York, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/b98879>
- [7] Marchevsky I.K., Puzikova V.V. Numerical simulation of wind turbine rotors auto-rotation by using the modified LS-STAG immersed boundary method. *Int. J. Rotating Mach.*, 2017, vol. 2017, art. 6418108. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/6418108>
- [8] Puzikova V.V. The LS-STAG immersed boundary method modification for viscoelastic flow computations. *Proceedings of ISP RAS*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 71–84 (in Russ.). DOI: [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2017-29\(1\)-5](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5)

- [9] Botella O., Cheny Y., Nikfarjam F., et al. Application of the LS-STAG immersed boundary/cut-cell method to viscoelastic flow computations. *Commun. Comput. Phys.*, 2016, vol. 20, iss. 4, pp. 870–901. DOI: <https://doi.org/10.4208/cicp.080615.010216a>
- [10] Wilkinson W.L. Non-Newtonian fluids. Pergamon Press, 1960.
- [11] Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1867, vol. 157, pp. 49–88. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
- [12] Jeffreys H. The Earth. Its origin, history and physical constitution. Cambridge Univ. Press, 1929.
- [13] Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, 1950, vol. 200, iss. 2063, pp. 523–541. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035>
- [14] Johnson M.W. Jr., Segalman D. A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, 1977, vol. 2, iss. 3, pp. 255–270. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(77\)80003-7](https://doi.org/10.1016/0377-0257(77)80003-7)
- [15] Roache P.J. Computational fluid dynamics. Hermosa, 1998.
- [16] Li X., Han X., Wang X. Numerical modeling of viscoelastic flows using equal low-order finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2010, vol. 199, iss. 9-12, pp. 570–581. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.10.010>

**Marchevsky I.K.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation); Senior Researcher, Institute for System Programming, Russian Academy of Sciences (A. Solzhenitsyna ul. 25, Moscow, 109004 Russian Federation).

**Puzikova V.V.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute for System Programming, Russian Academy of Sciences (A. Solzhenitsyna ul. 25, Moscow, 109004 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Marchevsky I.K., Puzikova V.V. The modified LS-STAG method application for planar viscoelastic flow computation in a 4:1 contraction channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 3 (96), pp. 46–63 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-46-63>