

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА НЕУСТОЙЧИВЫХ ПО ЯКОБИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНЫХ АЛГОРИТМОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

П.М. Шкапов¹

spm@bmstu.ru

А.В. Сулимов²

avsu7@mail.ru

В.Д. Сулимов¹

sulimov@bmstu.ru

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

² Филиал МГУ в г. Севастополе, Севастополь, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены задачи восстановления и анализа свободных параметров динамических систем по косвенной, приближенно заданной информации. В контексте теории Косамби — Картана — Черна введено геометрическое описание эволюции системы во времени. Для исследуемой системы определены пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подобное исследование представляет интерес в практических приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Сформулирована обратная задача вычислительной диагностики системы по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта. Решение регуляризованной обратной задачи определено с использованием оптимизационного подхода. Скалярные критериальные функции предполагаются непрерывными, многомерными, локально липшицевыми, не обязательно всюду дифференцируемыми. При поиске глобальных решений применены новые гибридные алгоритмы, интегрирующие стохастические алгоритмы сканирования пространства переменных и детерминированная процедура локальной минимизации. Численная процедура сканирования реализована с использованием двух модифицированных версий кратного алгоритма столкновения частиц (обучение с построением квазиоппозиций и обучение методом вращений). В фазе локального поиска введены двухпараметрические сглаживающие аппроксимации критериальных функций. Приведены

Ключевые слова

Динамическая система, управление, устойчивость по Якоби, геометрический инвариант, вычислительная диагностика, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм

примеры решения задач вычислительной диагностики неустойчивых по Якоби динамических систем: Поступила 08.10.2020
системы Лоренца и эллиптического маятника Принята 16.11.2020
с управлением © Автор(ы), 2021

Введение. Во многих практических исследованиях устойчивости динамических систем применяют метод Ляпунова [1]. Отдельное направление составляют задачи управления, например обеспечение робастной устойчивости системы, синтез оптимального управления, поиск оптимальной программы управления в заданном классе аппроксимаций [2, 3]. В общем случае конфигурационное пространство системы не является евклидовым. Описание динамики неголономных систем на касательных расслоениях и формулировка соответствующей задачи оптимального управления приведены в [4]. Класс задач оптимального управления системой на римановых многообразиях рассмотрен в [5]. Один из методов исследования устойчивости динамических систем представляет теория Косамби — Картана — Черна (теория ККЧ) [6]. Фундаментальным в теории ККЧ является предположение о существовании взаимно-однозначного соответствия между динамической системой (автономной или неавтономной) второго порядка и уравнениями геодезических в ассоциированном пространстве Финслера [7]. В рамках указанной теории реализован дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории динамической системы от ближайших траекторий. При геометрическом описании, вводимом теорией ККЧ, могут быть определены пять геометрических инвариантов системы. Второй инвариант (тензор кривизны отклонения) устанавливает оценку устойчивости системы по Якоби: соответствующий критерий устойчивости формулируется с использованием собственных значений указанного инварианта. Анализ устойчивости динамической системы по Якоби связан с изучением ее робастности (меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды) [8]. Применение теории ККЧ актуально во многих практических приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых одновременно существуют устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Подход может быть распространен на динамические системы произвольной размерности [7, 8].

Пусть для исследуемой динамической системы, обладающей заданной структурой, определен тензор кривизны отклонения. Предполагается, что собственные значения указанного тензора не только дают оценку устойчи-

ности системы по Якоби (в соответствии с теорией ККЧ), но также несут и некоторую информацию о самой системе (структура системы известна). Возможна постановка задачи, в которой требуется определить существенные характеристики исследуемой системы по заданным собственным значениям тензора кривизны отклонения. Входные данные задачи могут быть получены из эксперимента посредством прямых измерений с последующей компьютерной обработкой. В качестве искомым могут рассматриваться, например, физические и геометрические характеристики системы, характеристики управления и др. Формулируется задача вычислительной диагностики исследуемой динамической системы, связанная с восстановлением и анализом существенных характеристик системы по косвенной информации, представленной конечным множеством собственных значений тензора кривизны отклонения. Методы вычислительной диагностики находят широкое применение, например, в промышленных технологиях, физике и химии (исследования плазмы), биоинформатике [9–11]. Обратные задачи вычислительной диагностики относятся к классу некорректно поставленных задач, при решении которых требуется применение специальных методов регуляризации [12]. В настоящее время методы регуляризации обратных задач хорошо разработаны и продолжают совершенствоваться [13, 14]. Одним из основных подходов к решению задач вычислительной диагностики является оптимизационный, связанный с минимизацией некоторой критериальной функции (функции рассогласования). В практических условиях необходимо учитывать неполноту входной косвенной информации, зашумленность измеряемых данных, возможное наличие кратных собственных значений и др. [12]. Ввиду естественной ограниченности энергии изменений в системе справедливо предположение о том, что отношения приращений критериальных функций к приращениям аргументов не превышают некоторого порога, характеризуемого константой Липшица [2]. В общем случае критериальные функции обратных задач являются непрерывными, многомерными, локально липшицевыми, многоэкстремальными, не обязательно всюду дифференцируемыми. Следовательно, для решения обратных задач вычислительной диагностики требуется применение алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации [15]. Рассматриваемый подход основан на разработке и применении математических моделей систем, методов определения геометрических структур и анализа устойчивости систем по Якоби, методов теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Геометрические инварианты теории Косамби — Картана — Черна.

Предполагается, что переменные динамической системы x^i , $i = 1, 2, \dots, n$,

определены на действительном гладком n -мерном многообразии M ; касательное расслоение многообразия M обозначается как TM . Рассматривается открытое связное подмножество Ω евклидова $(2n + 1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. На подмножестве Ω вводится $(2n + 1)$ -мерная система координат (x^i, y^i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$, где $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y^i = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, $y^i = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right)$, t — время.

Уравнения движения лагранжевой механической системы (M, L, F_i) могут быть получены с использованием функции Лагранжа $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ и уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_i, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где (применительно к механическим системам) F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, представляют внешние силы. Если лагранжиан L является регулярным, то уравнения (1) эквивалентны следующей системе обыкновенных (обычно нелинейных) дифференциальных уравнений второго порядка [6]:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x^i, y^i, t) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

Здесь каждая функция $G^i(x^i, y^i, t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (y)_0, t_0)$ на Ω (при этом функции $G^i(x^i, y^i, t)$ определены в локальной системе координат на TM). Существенно, что в случае произвольной системы дифференциальных уравнений второго порядка вида (2) возможно изучение траекторий системы по аналогии с траекториями уравнений Эйлера — Лагранжа [6].

Для несингулярных преобразований координат ККЧ-производная векторного поля $\xi = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ на открытом подмножестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определяется в виде

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N_j^i \xi^j,$$

где локальные коэффициенты нелинейной связности определены как $N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Тогда первый ККЧ-инвариант ε^i получается при $y^i = \xi^i : N_j^i y^j - 2G^i = -\varepsilon^i$.

Варьирование траекторий $x^i(t)$ уравнений (2) относительно ближайших траекторий приводит к уравнениям в ковариантной форме [6, 7]:

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j, \quad (3)$$

где $P_j^i = -2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - 2G^i G_{jk}^i + y^i \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} + N_k^i N_j^k$; $G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

Уравнение (3) называется уравнением Якоби, а тензор P_j^i — вторым ККЧ-инвариантом (тензором кривизны отклонения). В рамках рассматриваемой теории могут быть определены пять ККЧ-инвариантов исследуемой динамической системы.

Определение [6]. Траектории системы дифференциальных уравнений (2) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора P_j^i всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.

Постановка обратной задачи. Обратная задача вычислительной диагностики в рамках выбранной математической модели описывается операторным уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где A — компактный линейный оператор, действующий из X в Y ; X, Y — гильбертовы пространства. Правая часть возмущенного операторного уравнения представляет собой приближенные входные данные y^δ , определенные по результатам эксперимента. Предполагается, что погрешность задания входной информации δ известна и имеет место $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно информации y^δ . Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [12, 13].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи предполагает поиск минимума функционала Тихонова

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2,$$

где $\|Ax - y^\delta\|_Y^2$ — функционал невязки (квадрат нормы в пространстве Y); $\alpha \|x\|_X^2$ — стабилизирующий функционал; α — параметр регуляризации, $\alpha > 0$. Регуляризованное решение задачи минимизации:

$$x_{\alpha}^{\delta} = \arg \min_{x \in X} J_{\alpha}(x).$$

Система Лоренца. Рассматривается применение теории ККЧ к системе дифференциальных уравнений, связанных с механикой жидкости. Исследуется система Лоренца, описываемая системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [16]

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dX}{dt} = -X + Y, \quad \frac{dY}{dt} = -XZ + \rho X - Y, \quad \frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z,$$

где X — координата, представляющая собой поле скоростей; Y, Z — координаты, представляющие собой поле температур; σ, ρ, β — некоторые свободные параметры. Представленные обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимируют систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих конвекцию (с конечной амплитудой) в слое жидкости, подогреваемой снизу. Параметры σ, ρ и β интерпретируются с физической точки зрения как число Прандтля, нормализованное число Рэлея и геометрический фактор (содержит информацию о геометрии конвективной ячейки) соответственно. Существенно, что система уравнений Лоренца является детерминированной, однако ее решение демонстрирует хаотическое поведение при $\rho > \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$ и $\sigma > \beta + 1$. После ввода обозначений $X = X^1, \dot{X} = Y^1, Z = X^2, \dot{Z} = Y^2, Y = X^3$ система Лоренца может быть представлена уравнениями вида (2):

$$\frac{d^2 X^i}{dt^2} + 2G^i(X^i, Y^i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

В контексте анализа устойчивости по Якоби в [16] указаны следующие точки равновесия динамической системы Лоренца: $S_0(0, 0)$, если $\rho \leq 1$, а также $S_+ [\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1]$ и $S_- [-\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1]$, если $\rho > 1$. Далее рассматривается точка равновесия $S_+, \rho > 1$: в этом случае компоненты тензора кривизны отклонения определяются как

$$P_1^1(S_+) = \frac{1}{4}(1 + \sigma)^2, \quad P_2^1(S_+) = -\sigma\sqrt{\beta(\rho-1)},$$

$$P_1^2(S_+) = \frac{\sqrt{\beta(\rho-1)}[(-7\sigma+1)\beta - \sigma^2 + 1]}{4\sigma}, \quad P_2^2(S_+) = \beta^2 - \beta(\rho-1).$$

Теорема [16]. Если свободные параметры $\beta, \rho > 1$ и σ системы Лоренца удовлетворяют одновременно условиям

$$\beta(\beta - \rho + 1) + (\sigma + 1)^2 / 4 < 0$$

и

$$\beta \{ \beta[-7\rho\sigma + \rho + \sigma(\sigma + 9)] - 2\sigma(\rho - 1)(\sigma + 1) \} / 4 > 0,$$

то точки равновесия $S_+ [\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1]$ и $S_- [-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1]$ системы Лоренца устойчивы по Якоби; в противном случае эти точки равновесия неустойчивы по Якоби.

Эллиптический маятник с управлением. Рассматривается применение теории ККЧ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамическую систему с управлением. Исследуется система с двумя степенями свободы — эллиптический маятник, состоящий из ползуна массой $m_1 = M$, жесткого невесомого стержня длиной l , а также материальной точки массой $m_2 = m$ на конце стержня. Для описания движения системы вводятся две обобщенные координаты: x — перемещение ползуна вдоль горизонтальной направляющей; θ — угол отклонения осевой линии стержня от вертикали. Управляющее входное воздействие представлено приложенной к ползуну активной силой F . После определения (регулярного) лагранжиана полученные с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа (1) дифференциальные уравнения движения, линеаризованные в окрестности положения равновесия ($x = 0$; $\theta = 0$), имеют вид [17]:

$$\ddot{x} = \frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F, \quad \ddot{\theta} = -\frac{(M+m)g}{Ml}\theta + \frac{1}{Ml}F, \quad (4)$$

где g — ускорение свободного падения, $g = 9,81$ м/с. Управляющее воздействие задано в виде $F = -(K_1x + K_2\dot{x} + K_3\theta + K_4\dot{\theta})$, K_i , $i = 1, \dots, 4$ — коэффициенты усиления обратной связи.

Показано в [17], что система (4) является управляемой и, следовательно, существуют соответствующие коэффициенты усиления обратной связи. В частности, для рассматриваемой системы заданы следующие (стандартные) параметры и коэффициенты усиления: $m_1 = 0,6$ кг; $m_2 = 0,4$ кг; $l = 1$ м; $K_3 = 8$ Н/рад; $K_4 = 10$ Н · с/рад.

Исследуется устойчивость по Якоби линеаризованной динамической системы (с двумя степенями свободы), описываемой дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + a_j^i \frac{dx^j}{dt} + b_j^i x^j = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

где a_j^i и b_j^i заданы с помощью постоянных коэффициентов уравнения (4). Локальные коэффициенты нелинейной связности, кривизны нулевой связности и связности Бервальда имеют вид

$$N_j^i = \frac{1}{2} a_j^i, \quad Z_j^i = \frac{1}{2} b_j^i, \quad G_{jk}^i = 0.$$

Компоненты первого и второго (тензора кривизны отклонения) инвариантов системы определены в форме [17] $\varepsilon^i = \frac{1}{2} a_j^i y^j + b_j^i x^j$, $P_j^i = -b_j^i + \frac{1}{4} a_j^i a_j^k$, при этом

$$P_1^1 = \frac{l(K_2)^2 - K_2 K_4 - 4lMK_1}{4lM^2}, \quad P_2^1 = \frac{lK_2 K_4 - (K_4)^2 - 4lM(K_3 - mg)}{4lM^2},$$

$$P_1^2 = \frac{K_2 K_4 - l(K_2)^2 - 4lMK_1}{4l^2 M^2}, \quad P_2^2 = \frac{(K_4)^2 - lK_2 K_4 + 4lM\{K_3 - (M+m)g\}}{4l^2 M^2}.$$

Гибридные алгоритмы глобальной оптимизации. Гибридные методы глобальной недифференцируемой оптимизации структурно объединяют стохастические методы сканирования пространства переменных и процедуры локального поиска. Подход к решению задач глобальной и локальной оптимизации с использованием методов прямого поиска представлен в [18]. Некоторые современные методы решения задач локальной недифференцируемой оптимизации описаны в [19–21]. Обзор актуальных детерминированных и стохастических методов глобальной оптимизации приведен в [22, 23]. Гибридный подход к решению задач глобальной оптимизации (в том числе при наличии ограничений) представлен в [24–27].

В настоящей работе используется два новых гибридных алгоритма глобальной недифференцируемой оптимизации:

1) QOM-PCALMSI объединяет стохастический кратный алгоритм QOM-PCA столкновения частиц (с построением квазиоппозиций) [25] в фазе сканирования пространства переменных и детерминированный алгоритм LMSI, реализующий метод линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций и итерационным уточнением в фазе локального поиска [28];

2) RBM-PCALMSI объединяет стохастический кратный алгоритм RBM-PCA столкновения частиц (с выборкой на основе вращений) [26] и алгоритм LMSI [28].

Численные примеры. *Пример 1.* Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для системы Лоренца установлены

приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -104,1$; $\lambda_2^* \approx 67,8$. Приведенная косвенная информация, полученная моделированием системы Лоренца при стандартных значениях ее параметров, представляет входные данные для решения обратной задачи. Относительная погрешность входных данных не превышает 0,1 %. Свободными переменными являются относительные (определяемые в процентах) величины x_1, x_2, x_3 , соответствующие искомым параметрам σ, ρ, β . Критериальная функция рассматриваемой обратной задачи определена как

$$F(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i^2(x) + \alpha \|x\|_2^2,$$

где $\gamma_i, f_i(x)$ — весовой коэффициент и частный критерий, соответствующие i -му собственному значению λ_i , $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$, $i = 1, 2$; α — параметр регуляризации; $x \in \mathbb{R}^3$.

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCALMSI. Изменение свободных переменных $x_i, i = 1, \dots, 3$, при возрастании числа итераций в заключительной фазе локального поиска показано на рис. 1, а, соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы $Nr(w)$ (w — вектор направления поиска) — на рис. 1, б. По завершении 24 итераций получено: $x_1^{24} \approx 69,75$ %, $x_2^{24} \approx 74,14$ %, $x_3^{24} \approx 66,67$ %. Восстановленные значения параметров системы равны: $\sigma \approx 9,921$; $\rho \approx 28,345$; $\beta \approx 2,667$. Наибольшая относительная погрешность

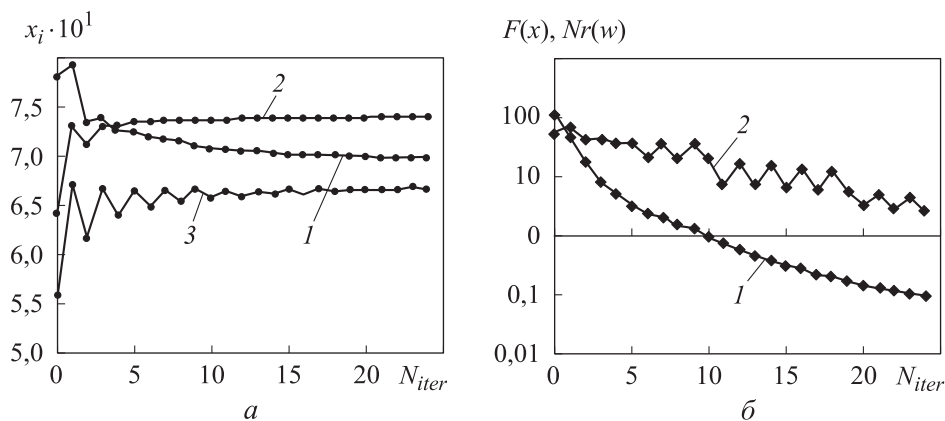


Рис. 1. Изменения значений свободных переменных x_1 (1), x_2 (2) и x_3 (3) (а), критериальной функции $F(x)$ (1) и нормы вектора направления поиска $Nr(w)$ (2) (б) при возрастании числа итераций N_{iter}

решения (определяется восстановленным значением параметра ρ) здесь не превышает 1,3 %. Вычислены параметры системы Лоренца, значения которых близки к стандартным: $\sigma_* = 10$; $\rho_* = 28$; $\beta_* = 2, (6)$.

Пример 2. Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для эллиптического маятника с управлением установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -18,33$; $\lambda_2^* \approx 105,76$ (получены моделированием управляемой системы при стандартных значениях ее параметров). Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0 %. Требуется восстановить значения параметров системы, при этом свободными переменными являются нормированные величины: x_1 (соответствует массе m материальной точки), а также x_i , соответствующие коэффициентам усиления обратной связи K_{i-1} , $i = 2, \dots, 4$; $x \in \mathbb{R}^4$.

При решении используется гибридный алгоритм RBM-PCALMSI. Сходимость решения в заключительной фазе локального поиска показана на рис. 2. По завершении 11 итераций получено: $x_1^{11} \approx 0,9673$; $x_2^{11} \approx 0,9922$; $x_3^{11} \approx 0,99997$; $x_4^{11} \approx 1,0336$. Восстановленные приближенные значения параметров системы равны $m \approx 0,3877$ кг; $K_1 \approx 39,688$; $K_2 \approx 24,9993$; $K_3 \approx 8,269$. Наибольшая относительная погрешность решения (определяется значением коэффициента усиления K_3) не превышает 3,4 %.

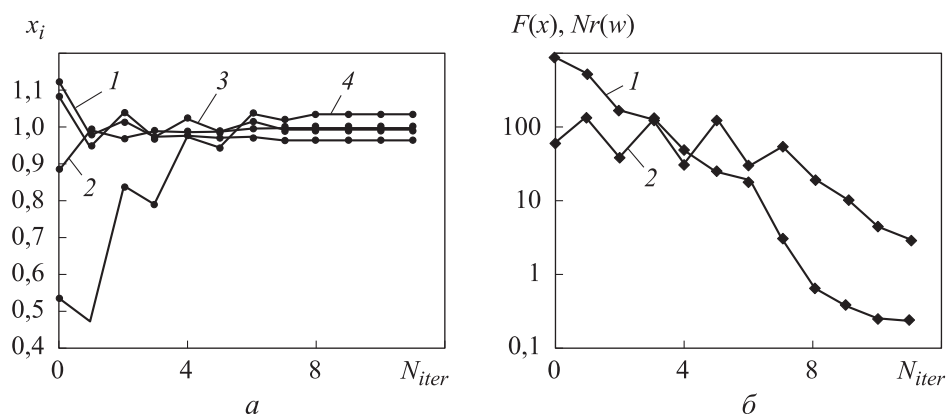


Рис. 2. Изменения значений свободных переменных x_1 (1), x_2 (2), x_3 (3) и x_4 (4) (а), критериальной функции $F(x)$ (1) и нормы вектора направления поиска $Nr(w)$ (2) (б) при возрастании числа итераций N_{iter}

Выводы. Рассмотрены задачи вычислительной диагностики неустойчивых по Якоби динамических систем, связанные в рамках теории ККЧ

с определением второго геометрического инварианта. Предложена методика восстановления характеристик систем по собственным значениям тензора кривизны отклонения. Представлены новые гибридные алгоритмы глобальной оптимизации. Проведено модельное восстановление характеристик системы Лоренца и динамической системы с управлением. Точность приближенных решений согласована с точностью задания входной информации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
- [2] Квасов Д.Е., Сергеев Я.Д. Методы липшицевой глобальной оптимизации в задачах управления. *Автоматика и телемеханика*, 2013, № 9, с. 3–19.
- [3] Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2003, № 5, с. 156–163.
- [4] Colombo L.A. A variational-geometric approach for the optimal control of nonholonomic systems. *Int. J. Dynam. Control*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 652–662. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40435-017-0326-6>
- [5] Bloch A.M., Gupta F., Kolmanovsky I.V. Neighboring external optimal control for mechanical systems on Riemannian manifolds. *J. Geom. Mech.*, 2016, vol. 8, iss. 3, pp. 257–272. DOI: <http://dx.doi.org/10.3934/jgm.2016007>
- [6] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196. DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2012.v16.n4.a2>
- [7] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi — Cartan — Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *Int. J. Geom. Methods M.*, 2016, vol. 13, no. 2, art. 1656014. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
- [8] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.*, 2012, vol. 10, iss. 1, pp. 13–32. DOI: <https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
- [9] Лаврентьев М.М., Жаринов С.Ю., Зекаль С.М. и др. Вычислительная диагностика поверхностных характеристик протяженных цилиндрических объектов методами активной локации. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2002, т. 5, № 1, с. 105–113.
- [10] Charles C., Bish A., Boswell R.W., et al. A short review of experimental and computational diagnostics for radiofrequency plasma micro-thrusters. *Plasma Chem. Plasma Process.*, 2016, vol. 36, no. 1, pp. 29–44. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11090-015-9654-5>

- [11] Oulas A., Minadakis G., Zachariou M., et al. Systems Bioinformatics: increasing precision of computational diagnostics and therapeutics through network-based approaches. *Brief. Bioinformatics*, 2019, vol. 20, iss. 3, pp. 806–824. DOI: <https://doi.org/10.1093/bib/bbx151>
- [12] Wang Y., Yang C., Yagola A.G. (eds). Optimization and regularization for computational inverse problems and applications. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13742-6>
- [13] Andreev R. Tikhonov and Landweber convergence rates: characterization by interpolation spaces. *Inverse Probl.*, 2015, vol. 31, no. 10, art. 105007. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/10/105007>
- [14] Sprung B., Hohage T. Higher order convergence rates for Bregman iterated variational regularization of inverse problems. *Numer. Math.*, 2019, vol. 141, no. 2, pp. 215–252. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0987-x>
- [15] Xu Y.-T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, iss. 21, pp. 6438–6450. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.059>
- [16] Harko T., Ho C.Y., Leung C.S., et al. Jacobi stability analysis of the Lorenz system. *Int. J. Geom. Methods M.*, 2015, vol. 12, no. 7, art. 1550081. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887815500814>
- [17] Yajima T., Yamasaki K. Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2016, vol. 13, no. 4, art. 1650045. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500456>
- [18] Custódio A.L., Madeira J.F.A. GLODS: global and local optimization using direct search. *J. Glob. Optim.*, 2015, vol. 62, no. 1, pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10898-014-0224-9>
- [19] Du Y., Ruszczynski A. Rate of convergence of the bundle method. *J. Optim. Theory Appl.*, 2017, vol. 173, no. 3, pp. 908–922. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1108-1>
- [20] Davis D., Drusvyatskiy D., MacPhee K.J., et al. Subgradient methods for sharp weakly convex functions. *J. Optim. Theory Appl.*, 2018, vol. 179, no. 3, pp. 962–982. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-018-1372-8>
- [21] Curtis F.E., Robinson D.P., Zhou B. A self-correcting variable-metric algorithm framework for nonsmooth optimization. *IMA J. Numer. Anal.*, 2020, vol. 40, iss. 2, pp. 1154–1187. DOI: <https://doi.org/10.1093/imanum/drz008>
- [22] Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization. *J. Glob. Optim.*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 3–38. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9332-8>

- [23] Žilinskas A., Zhigljavsky A. Stochastic global optimization: a review on the occasion of 25 years of Informatica. *Informatica*, 2016, vol. 27, no. 2, pp. 229–256.
- [24] Liu J., Zhang S., Wu C., et al. A hybrid approach to constraint global optimization. *Appl. Soft Comput.*, 2016, vol. 47, pp. 281–294.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.05.021>
- [25] Torres R.H., de Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Sel. Mat.*, 2019, vol. 6, no. 2, pp. 156–177.
- [26] Torres R.H., de Campos Velho H.F. Rotation-based sampling Multi-Particle Collision Algorithm with Hooke — Jeeves. *Proc. Ser. Brazil. Soc. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 5, no. 1, art. 01473. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0473>
- [27] Xu J., Yan F., Yun K., et al. Dynamically dimensioned search embedded with piecewise opposition-based learning for global optimization. *Sci. Program.*, 2019, vol. 2019, art. 2401818. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/2401818>
- [28] Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Сулимов А.В. Оптимизация сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров, с использованием гибридных алгоритмов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 5 (68), с. 46–66. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-5-46-66>

Шкапов Павел Михайлович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» им. профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1).

Сулимов Андрей Валерьевич — старший преподаватель кафедры физики и геофизики Филиала МГУ в г. Севастополе (Российская Федерация, 299001, Севастополь, ул. Героев Севастополя, д. 7).

Сулимов Валерий Дмитриевич — старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика» им. профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>

COMPUTATIONAL DIAGNOSTICS OF JACOBI UNSTABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH THE USE OF HYBRID ALGORITHMS OF GLOBAL OPTIMIZATION

P.M. Shkapov¹

A.V. Sulimov²

V.D. Sulimov¹

spm@bmstu.ru

avsu7@mail.ru

sulimov@bmstu.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

²Lomonosov Moscow State University, Sevastopol Branch, Sevastopol, Russian Federation

Abstract

The study focuses on the problems of restoration and analysis of free parameters of dynamical systems from indirect, approximately given information. In the context of the Kosambi — Cartan — Chern theory, a geometric description of the time-evolution of the system is introduced. Five geometric invariants are determined for the system under study. The eigenvalues of the second invariant estimate the Jacobi stability of the system. Such a study is of interest in practical applications, where it is required to identify the regions in which both Lyapunov stability and Jacobi stability occur simultaneously. The inverse problem of computational diagnostics of the system is formulated for approximately given eigenvalues of the second invariant. The solution to the regularized inverse problem is determined using an optimization approach. Scalar criterion functions are assumed to be continuous, multidimensional, locally Lipschitzian, and not necessarily everywhere differentiable. When searching for global solutions, we used new hybrid algorithms that integrate stochastic algorithms for scanning the space of variables and a deterministic local minimization procedure. The numerical scanning procedure is implemented with the use of two modified versions: quasi-opposition-based and rotation-based learning mechanisms. In the phase of local search, two-parameter smoothing approximations of criterion functions are introduced. Examples of solving problems of computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems are given: the Lorentz system and a controllable elliptical pendulum

Keywords

Dynamical system, control, Jacobi stability, geometrical invariant, computational diagnostics, global optimization, hybrid algorithm

Received 08.10.2020

Accepted 16.11.2020

© Author(s), 2021

REFERENCES

- [1] Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
- [2] Kvasov D.E., Sergeyev Ya.D. Lipschitz global optimization methods in control problems. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 9, pp. 1435–1448. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117913090014>
- [3] Velishchanskiy M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 811–818.
- [4] Colombo L.A. A variational-geometric approach for the optimal control of nonholonomic systems. *Int. J. Dynam. Control*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 652–662. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40435-017-0326-6>
- [5] Bloch A.M., Gupta F., Kolmanovsky I.V. Neighboring external optimal control for mechanical systems on Riemannian manifolds. *J. Geom. Mech.*, 2016, vol. 8, iss. 3, pp. 257–272. DOI: <http://dx.doi.org/10.3934/jgm.2016007>
- [6] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196. DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2012.v16.n4.a2>
- [7] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi — Cartan — Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *Int. J. Geom. Methods M.*, 2016, vol. 13, no. 2, art. 1656014. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
- [8] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.*, 2012, vol. 10, iss. 1, pp. 13–32. DOI: <https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
- [9] Lavrent'yev M.M., Zharinov S.Yu., Zekal' S.M., et al. Computational diagnostics of surface characteristics of lengthy cylindrical objects by means of active location. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2002, vol. 5, no. 1, pp. 105–113 (in Russ.).
- [10] Charles C., Bish A., Boswell R.W., et al. A short review of experimental and computational diagnostics for radiofrequency plasma micro-thrusters. *Plasma Chem. Plasma Process.*, 2016, vol. 36, no. 1, pp. 29–44. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11090-015-9654-5>
- [11] Oulas A., Minadakis G., Zachariou M., et al. Systems Bioinformatics: increasing precision of computational diagnostics and therapeutics through network-based approaches. *Brief. Bioinformatics*, 2019, vol. 20, iss. 3, pp. 806–824. DOI: <https://doi.org/10.1093/bib/bbx151>
- [12] Wang Y., Yang C., Yagola A.G. (eds). Optimization and regularization for computational inverse problems and applications. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13742-6>
- [13] Andreev R. Tikhonov and Landweber convergence rates: characterization by interpolation spaces. *Inverse Probl.*, 2015, vol. 31, no. 10, art. 105007. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/10/105007>

- [14] Sprung B., Hohage T. Higher order convergence rates for Bregman iterated variational regularization of inverse problems. *Numer. Math.*, 2019, vol. 141, no. 2, pp. 215–252. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0987-x>
- [15] Xu Y.-T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, iss. 21, pp. 6438–6450. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.059>
- [16] Harko T., Ho C.Y., Leung C.S., et al. Jacobi stability analysis of the Lorenz system. *Int. J. Geom. Methods M.*, 2015, vol. 12, no. 7, art. 1550081. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887815500814>
- [17] Yajima T., Yamasaki K. Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2016, vol. 13, no. 4, art. 1650045. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500456>
- [18] Custódio A.L., Madeira J.F.A. GLODS: global and local optimization using direct search. *J. Glob. Optim.*, 2015, vol. 62, no. 1, pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10898-014-0224-9>
- [19] Du Y., Ruszczyski A. Rate of convergence of the bundle method. *J. Optim. Theory Appl.*, 2017, vol. 173, no. 3, pp. 908–922. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1108-1>
- [20] Davis D., Drusvyatskiy D., MacPhee K.J., et al. Subgradient methods for sharp weakly convex functions. *J. Optim. Theory Appl.*, 2018, vol. 179, no. 3, pp. 962–982. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-018-1372-8>
- [21] Curtis F.E., Robinson D.P., Zhou B. A self-correcting variable-metric algorithm framework for nonsmooth optimization. *IMA J. Numer. Anal.*, 2020, vol. 40, iss. 2, pp. 1154–1187. DOI: <https://doi.org/10.1093/imanum/drz008>
- [22] Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization. *J. Glob. Optim.*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 3–38. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9332-8>
- [23] Žilinskas A., Zhigljavsky A. Stochastic global optimization: a review on the occasion of 25 years of *Informatica*. *Informatica*, 2016, vol. 27, no. 2, pp. 229–256.
- [24] Liu J., Zhang S., Wu C., et al. A hybrid approach to constraint global optimization. *Appl. Soft Comput.*, 2016, vol. 47, pp. 281–294. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.05.021>
- [25] Torres R.H., de Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Sel. Mat.*, 2019, vol. 6, no. 2, pp. 156–177.
- [26] Torres R.H., de Campos Velho H.F. Rotation-based sampling Multi-Particle Collision Algorithm with Hooke — Jeeves. *Proc. Ser. Brazil. Soc. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 5, no. 1, art. 01473. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0473>

[27] Xu J., Yan F., Yun K., et al. Dynamically dimensioned search embedded with piecewise opposition-based learning for global optimization. *Sci. Program.*, 2019, vol. 2019, art. 2401818. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/2401818>

[28] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Optimization of singular values of parameter dependent matrices using hybrid algorithms. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2016, no. 5 (68), pp. 46–66 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-5-46-66>

Shkapov P.M. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Sulimov A.V. — Assist. Professor, Department of Physics and Geophysics, Lomonosov Moscow State University, Sevastopol Branch (Geroev Sevastopolya ul. 7, Sevastopol, 299001 Russian Federation).

Sulimov V.D. — Assist. Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5/1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D. Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 40–56 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>