УДК 536.75 DOI: 10.18698/1812-3368-2021-5-60-72

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

А.Н. Морозов amor@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

На примере броуновского движения проведено кинетическое описание процесса возрастания энтропии в неравновесной среде. Показано, что в зависимости от степени неравновесности стремление к равновесному состоянию происходит по разным законам. Для случая сильно неравновесной среды возрастание энтропии описывается математически самым слабым логарифмическим законом, а в случае среды, близкой к равновесию, энтропия стремится к максимальному значению по самому сильному математическому закону — экспоненциальному. Полученные выражения, описывающие броуновское движение, могут быть распространены и на все другие неравновесные процессы. Проведенное математическое моделирование позволило рассчитать процесс возрастания энтропии для произвольной степени неравновесности и установить параметры, при которых происходит переход от логарифмического к экспоненциальному закону возрастания энтропии при стремлении термодинамической системы к равновесному состоянию

Ключевые слова

Термодинамическое равновесие, неравновесное состояние, гипотеза локального равновесия, производство энтропии, броуновское движение

Поступила 06.11.2020

Принята 07.12.2020

Введение. При термодинамическом описании процессов переноса в равновесной среде применяется гипотеза локального равновесия, которая позволяет полагать, что среда находится в любой своей точке в состоянии термодинамического равновесия [1–3]. В среде, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия, в каждой точке наблюдаются равновесные флуктуации, которые описываются моделью белого шума [1, 4]. В рамках указанной модели проводится описание любых равновесных процессов переноса, включая броуновское движение [5].

Для случая неравновесной среды, особенно при сильно неравновесных процессах, гипотеза локального равновесия не применима [5, 6].

В частности, на это указывает необходимость применения теории немарковских процессов для описания броуновского движения [7], диффузии [8, 9], запутанных состояний микрочастиц [10], квантовых процессов [11], турбулентности [12] и т. д. В этом случае необходимо учитывать производство энтропии в каждой точке неравновесной среды [1, 13]. При этом в каждой точке среды будут наблюдаться флуктуации, описываемые моделью фликкер-шума [14, 15].

Кинетический подход к описанию неравновесных состояний в последнее время широко используется для моделирования биологических процессов [16] и даже для описания процессов в социальных системах [17]. В этих моделях используется подход, основанный на решении дифференциальных кинетических уравнений, описывающих марковские процессы [18]. Применение теории немарковских процессов и интегральных уравнений и для указанных случаев должно позволить получить более адекватное описание неравновесных состояний.

Цель работы — установление зависимости возрастания энтропии при стремлении термодинамической системы к состоянию термодинамического равновесия.

Описание равновесных процессов переноса. Равновесные процессы переноса хорошо описываются в рамках линейной термодинамики, в которой соотношение между термодинамическими силами $\vec{X}$ и термодинамическими потоками $\vec{J}$ имеют вид

$$J_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} X_j, \tag{1}$$

где L_{ij} — кинетические коэффициенты.

Далее для простоты изложения будем полагать, что описывается один термодинамический процесс $(N=1)$. Тогда выражение (1) приобретает форму

$$J = LX \tag{2}$$

или

$$X = L^{-1} J. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) также можно записать в виде, учитывающем изменение термодинамической силы X и термодинамического потока J с течением времени:

$$J(t) = \int_{-\infty}^{t} L(t-\tau) X(\tau) d\tau, \tag{4}$$

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}L^{-1}(t-\tau)J(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} L(t-\tau)=L_0\delta(t-\tau); \\ L^{-1}(t-\tau)=L_0^{-1}\delta(t-\tau). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь L_0 — кинетический коэффициент переноса; $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция.

Отметим, что зависимости (4) и (5) однозначно определяют характер равновесных флуктуаций, корреляционная функция которых представляет собой дельта-функцию, а спектр — белый шум.

Проведем кинетическое описание равновесного процесса переноса на примере броуновского движения. При описании броуновского движения термодинамическую силу полагают равной

$$X=\frac{P}{MkT}, \tag{7}$$

а кинетический коэффициент переноса —

$$L_0=\gamma k. \tag{8}$$

Здесь P — импульс броуновской частицы; M — ее масса; k — постоянная Больцмана; T — температура среды; γ — коэффициент релаксации броуновской частицы. Отметим, что для броуновского движения среда выполняет роль термостата, а ее температура T является температурой термостата.

При термодинамическом описании используем уравнение броуновского движения

$$\frac{dP}{dt}+MTJ=F(t), \tag{9}$$

которое справедливо при воздействии на броуновскую частицу внешней детерминированной силы $F(t)$ и отсутствии случайной силы Ланжевена.

С учетом формул (4), (6), (7) и (8) уравнение (9) приобретает вид

$$\frac{dP}{dt}+\gamma P=F(t). \tag{10}$$

Решение уравнения (10) имеет хорошо известную форму:

$$P(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\gamma(t-\tau)\right)F(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Для нахождения затухающей зависимости $P(t)$ при отсутствии внешнего воздействия и начальном условии $P(t)\big|_{t=0} = P_0$ подставим в (11) силу $F(\tau)$ в виде $F(\tau) = P_0\delta(\tau)$. Тогда получим затухающую зависимость для импульса броуновской частицы

$$P(t) = P_0 \exp(-\gamma t), \tag{12}$$

а выражение для термодинамического потока $J(t)$ примет вид

$$J(t) = \frac{\gamma P_0}{MT}\exp(-\gamma t).$$

В рассматриваемом случае равновесного процесса переноса производство энтропии можно рассчитать по формуле [19]

$$\sigma_s(t) = P(t)J(t) = \frac{\gamma P_0^2}{MT}\exp(-2\gamma t),$$

а сама энтропия будет стремиться к максимуму по экспоненциальному закону

$$S(t) = \int_0^t \sigma_s(\tau)\,d\tau = \frac{P_0^2}{2MT}\big(1 - \exp(-2\gamma t)\big). \tag{13}$$

Как следует из выражения (13), приближение к максимальному значению для энтропии происходит по экспоненциальному закону, который является самой «сильной» математической зависимостью.

Описание сильно неравновесных процессов переноса. Опишем сильно неравновесную среду, для которой принцип локального равновесия не применим. Для предельно сильно неравновесной среды можно полагать, что ее локальные флуктуации описываются идеальным фликкер-шумом, сектор $G(f)$ которого представляет собой зависимость, обратно пропорциональную частоте *f*: $G(f) \sim f^{-1}$. В этом случае (4) принимает вид [13, 20]

$$J(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{L_0}{\sqrt{\nu_\tau (t-\tau)}}\frac{dX(\tau)}{d\tau}\,d\tau, \tag{14}$$

где $\nu_\tau = 1/\tau_0$ — интенсивность случайных флуктуаций в локально-неравновесной среде; τ_0 — постоянная времени хаотизации частиц среды.

Следует отметить, что интегральное уравнение (14) представляет собой уравнение Абеля [21], решение которого позволяет найти зависимость термодинамической силы $X(t)$ от термодинамического потока $J(t)$, т. е. аналог формулы (5):

$$X(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sqrt{\nu_\tau}}{L_0\sqrt{t-\tau}}J(\tau)\,d\tau. \qquad (15)$$

Наличие в знаменателе выражений (14) и (15) корня от разности времени t и τ однозначно указывает на то, что предельно сильные неравновесные флуктуации описываются моделью фликкер-шума. Процесс, описываемый моделью фликкер-шума, является немарковским случайным процессом с бесконечной памятью [1].

Результаты анализа формул (14) и (15) также позволяют сделать вывод, что сильно неравновесный процесс не может быть стационарным при отсутствии внешних воздействий, так как подстановка в (15) постоянного значения термодинамического потока $J(\tau)=\mathrm{const}$ приводит к растущей со временем термодинамической силе $X(t)\sim\sqrt{t}$.

Уравнение броуновского движения (9) с учетом выражений (7), (8) и (14) позволяет записать интегродифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dt}+\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\gamma}{\sqrt{\nu_\tau(t-\tau)}}\frac{dP(\tau)}{d\tau}d\tau=F(t). \qquad (16)$$

Преобразование Лапласа уравнения (16) позволяет записать его в изображениях

$$s\hat{P}(s)+\frac{\gamma\sqrt{\pi s}}{\sqrt{\nu_\tau}}\hat{P}(s)=\hat{F}(s).$$

Тогда решение уравнения (16) в изображениях принимает вид

$$\hat{P}(s)=\frac{\sqrt{\nu_\tau}}{\sqrt{\nu_\tau}s+\gamma\sqrt{\pi s}}\hat{F}(s). \qquad (17)$$

Из формулы (17) нетрудно видеть, что если бы сила $F(t)$ описывалась случайным процессом (белый шум), то импульс броуновской частицы был бы случайным процессом (фликкер-шум).

Обратное преобразование Лапласа позволяет с использованием (17) получить решение

$$P(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left(\frac{\pi\gamma^2}{\nu_\tau}(t-\tau)\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{\nu_\tau}}\sqrt{t-\tau}\right)F(\tau)\,d\tau. \qquad (18)$$

При подстановке в (18) силы $F(\tau)$ в виде $F(\tau)=P_0\delta(\tau)$ интеграл в уравнении (18) принимает вид

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{\pi\gamma^2}{\nu_\tau} t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{\nu_\tau}} \sqrt{t}\right). \tag{19}$$

Асимптотическое разложение (19) в ряд (см. [22]) при условии $t \gg \tau^*$ и сохранении только первого слагаемого дает

$$P(t) = P_0 \frac{\sqrt{\tau^*}}{\sqrt{t}}, \tag{20}$$

где $\tau^* = \nu_\tau / (\pi^2\gamma^2)$.

Подстановка решения (20) в (14) с учетом (7) и (8) при условии $t \gg \tau^*$ дает

$$J(t) = -\frac{P_0}{2\pi MT} \int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{P_0}{2MT\sqrt{\tau^* t}}. \tag{21}$$

Тогда производство энтропии в рассматриваемой замкнутой системе будет равно

$$\sigma_s(t) = P(t) J(t) = \frac{P_0^2}{2TMt}, \tag{22}$$

а энтропия при $t \gg \tau^*$ будет возрастать по логарифмическому закону

$$S(t) = \int_0^t \sigma_s(\tau) d\tau = \frac{P_0^2}{2MT} \ln\left(\frac{t}{\tau^*}\right). \tag{23}$$

Следовательно, проведенное вычисление возрастания энтропии в сильно неравновесном процессе переноса показывает, что возрастание происходит по логарифмическому закону, т. е. максимально медленно, так как логарифм является самой «слабой» математической функцией.

Описание процессов переноса в общем случае. При описании необратимых процессов переноса в общем случае можно полагать, что одновременно имеют место два конкурирующих процесса: 1) равновесный; 2) сильно неравновесный [13, 20]. Тогда выражение для зависимости термодинамического потока $J(t)$ от термодинамической силы $X(t)$ можно записать в виде

$$J(t) = \int_{-\infty}^t L_0 \left(\delta(t-\tau) + \frac{1}{\sqrt{\nu_\tau (t-\tau)}} \frac{d}{d\tau}\right) X(\tau) d\tau,$$

а уравнение броуновского движения как

$$\frac{dP}{dt} + \gamma P + \int_{-\infty}^t \frac{\gamma}{\sqrt{\nu_\tau (t-\tau)}} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau = F(t). \tag{24}$$

После преобразования Лапласа уравнение (24) принимает вид

$$s\hat{P}(s)+\gamma\hat{P}(s)+\frac{\gamma\sqrt{\pi s}}{\sqrt{\nu_\tau}}\hat{P}(s)=\hat{F}(s),$$

а его решение в изображениях может быть записано в форме

$$\hat{P}(s)=\frac{\sqrt{\nu_\tau}}{\sqrt{\nu_\tau}\,(s+\gamma)+\gamma\sqrt{\pi s}}\hat{F}(s).$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет записать решение уравнения (24) в виде

$$P(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}a\Big(b_1\exp\big(b_1^2(t-\tau)\big)\operatorname{erfc}\big(b_1\sqrt{t-\tau}\big)-$$

$$-b_2\exp\big(b_2^2(t-\tau)\big)\operatorname{erfc}\big(b_2\sqrt{t-\tau}\big)\Big)F(\tau)\,d\tau, \qquad (25)$$

где

$$a=\frac{\sqrt{\nu_\tau}}{\sqrt{\gamma(\pi\gamma-4\nu_\tau)}};\;\; b_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\nu_\tau}}\left(\sqrt{\pi\gamma}+\sqrt{\pi\gamma-4\nu_\tau}\right);$$

$$b_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\nu_\tau}}\left(\sqrt{\pi\gamma}-\sqrt{\pi\gamma-4\nu_\tau}\right).$$

При $\nu_\tau\gg\gamma$ формула (25) переходит в (11), а при $\nu_\tau\ll\gamma$ — в (18).

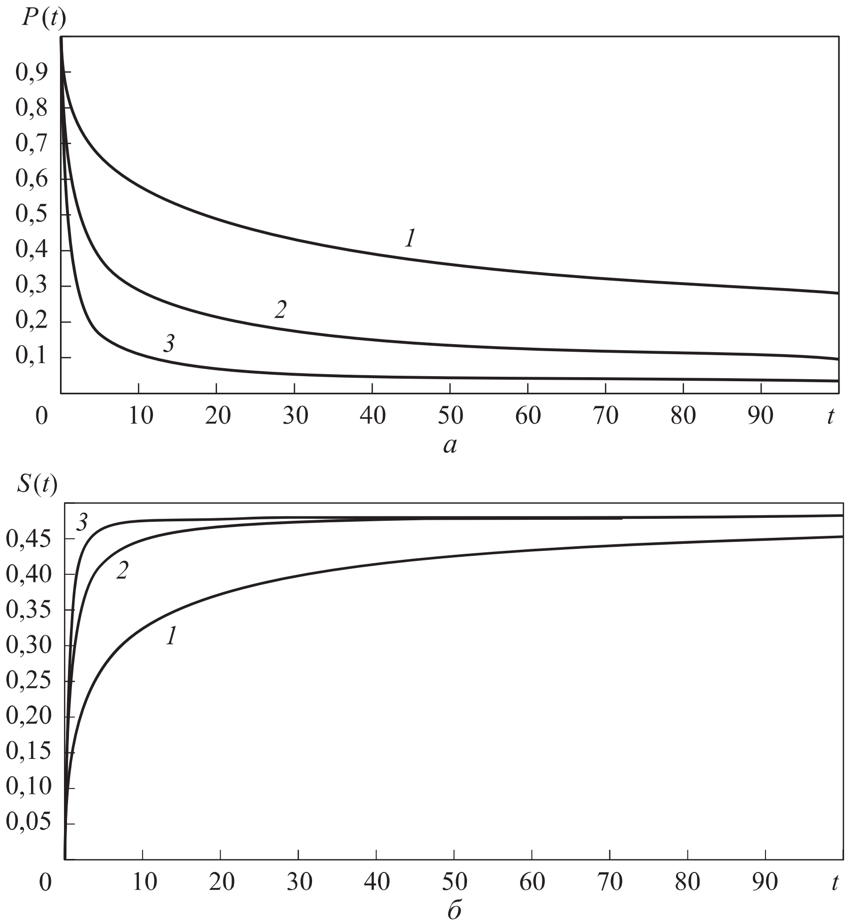
Подстановка в (25) силы $F(\tau)$ в виде $F(\tau)=P_0\delta(\tau)$ позволяет интеграл в уравнении (25) представить как

$$P(t)=aP_0\Big(b_1\exp\big(b_1^2t\big)\operatorname{erfc}\big(b_1\sqrt{t}\big)-b_2\exp\big(b_2^2t\big)\operatorname{erfc}\big(b_2\sqrt{t}\big)\Big). \qquad (26)$$

Выражение (26) позволяет рассчитать функции $P(t)$, $J(t)$, $\sigma_s(t)$ и $S(t)$ для произвольного соотношения между величинами γ и ν_τ.

Численное моделирование. Выполним численный расчет функций $P(t)$, $J(t)$, $\sigma_s(t)$ и $S(t)$ по полученным выше формулам. Будем полагать, что $M=1$ и $T=1$, а между величинами γ и ν_τ установлено соотношение $\nu_\tau=c\gamma$. Время t рассчитано в единицах $1/\gamma$.

Зависимости $P(t)$ и $S(t)$ для различных значений безразмерного параметра c приведены на рисунке. Хорошо видно, что при $c\gg1$ характер зависимостей приближается к рассмотренному выше случаю равновесного процесса (см. (12) и (13)), а при $c\ll1$ соответствует описанию сильно неравновесного процесса переноса (см. (20) и (23)).



Зависимости импульса $P(t)$ (*а*) и энтропии $S(t)$ (*б*)
при c = 0,1 (*1*), 1,0 (*2*) и 10 (*3*)

Частный случай. Интересный случай представляет вариант, когда $\pi\gamma = 4\nu_\tau$. Тогда (25) приобретает вид

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(\gamma(t-\tau))\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma(t-\tau)}\right) F(\tau)\, d\tau,$$

а (26) —

$$P(t) = P_0 \exp(\gamma t)\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma t}\right). \tag{27}$$

Разложение (27) в ряд (см. [22]) при $t \gg 1/\gamma$ и сохранении только первого слагаемого дает

$$P(t) = P_0 \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma t}}. \tag{28}$$

Тогда выражение для термодинамического потока $J(t)$ принимает вид

$$J(t) = -\frac{P_0}{\pi MT}\int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \frac{P_0\sqrt{\gamma}}{MT\sqrt{\pi t}}. \tag{29}$$

В рассматриваемом случае производство энтропии можно рассчитать по формуле

$$\sigma_s(t) = P(t)J(t) = \frac{P_0^2}{MTt}, \tag{30}$$

а энтропию $S(t)$ — с использованием выражения

$$S(t) = \int_0^t \sigma_s(\tau)\,d\tau = \frac{P_0^2}{MT}\ln(\gamma t). \tag{31}$$

Хорошо видно, что формулы (28)–(31) аналогичны формулам (20)–(23), но с отличающимися коэффициентами.

Заключение. Проведенное кинетическое описание показало, что при стремлении термодинамической системы к состоянию равновесия наблюдаются следующие зависимости: в сильно неравновесном состоянии — возрастание энтропии по логарифмическому закону, далее при переходе к квазиравновесному состоянию стремление энтропии к равновесному значению происходит по экспоненциальному закону. Отметим, что подобный характер стремления энтропии к равновесному значению наблюдается и при тепловом контакте двух тел [23].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Немарковские физические процессы. М., ФИЗМАТЛИТ, 2018.

[2] Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability, and fluctuations. Wiley, 1971.

[3] Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2001. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-56565-6

[4] Morozov A.N. Description of transfer processes in a locally nonequilibrium medium. *Entropy*, 2019, vol. 21, iss. 1, art. 9. DOI: https://doi.org/10.3390/e21010009

[5] Бункин Н.Ф., Морозов А.Н. Стохастические системы в физике и технике. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

[6] Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *УФН*, 1997, т. 167, № 10, с. 171–180. DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095

[7] Mainardi F., Mura A., Tampieri F. Brownian motion and anomalous diffusion revisited via a fractional Langevin equation. *Modern Problems of Statistical Physics*, 2009, vol. 8, pp. 3–23.

[8] Lenzi E.K., Evangelista L.R., Lenzi M.K., et al. Solutions for a non-Markovian diffusion equation. *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, iss. 41, pp. 4193–4198.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.08.049

[9] Mura A., Taqqu M.S., Mainardi F. Non-Markovian diffusion equations and processes: analysis and simulations. *Physica A*, 2008, vol. 387, iss. 21, pp. 5033–5064.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.04.035

[10] Li J.-G., Zu J., Shao B. Factorization law for entanglement evolution of two qubits in non-Markovian pure dephasing channels. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 24, pp. 2300–2304. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.04.053

[11] Iwamatsu A., Ogawa Y., Mitsumori Y., et al. Non-Markovian dephasing of excitons in GaAs quantum wells. *J. Lumin.,* 2006, vol. 119-120, pp. 487–491.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2006.01.040

[12] Xia H. Non-Markovian velocity diffusion in plasma turbulence. *Dissertation Abstracts International*, 1994, vol. 54, p. 2029.

[13] Морозов А.Н. Броуновское движение как необратимый немарковский процесс. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2019, № 2 (83), с. 94–103. DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-94-103

[14] Кузовлев Ю.Е. Почему природе нужен 1/f-шум? *УФН*, 2015, т. 185, № 7, с. 773–783. DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.0185.201507d.0773

[15] Морозов А.Н. Фликкер-шум в локально-неравновесной среде. *Письма в ЖЭТФ*, 2018, т. 107, № 11-12, с. 823–824.
DOI: https://doi.org/10.7868/S0370274X18120135

[16] Coscia V., Fermo L., Bellomo N. On the mathematical theory of living systems II: the interplay between mathematics and system biology. *Comput. Math. Appl.,* 2011, vol. 62, iss. 10, pp. 3902–3911. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.09.043

[17] Aristov V.V., Ilyin O. Kinetic models for historical processes of fast invasion and aggression. *Phys. Rev. E,* 2015, vol. 91, iss. 4, art. 04286.
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.042806

[18] Aristov V.V. Biological systems as nonequilibrium structures described by kinetic methods. *Results Phys.,* 2019, vol. 13, art. 102232.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102232

[19] Базаров И.П. Термодинамика. М., Высш. шк., 1991.

[20] Морозов А.Н. Неравновесные флуктуации броуновской частицы в среде с производством энтропии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2020, № 1 (94), с. 47–56.
DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-47-56

[21] Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М., Наука, 1982.

[22] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., Наука, 1977.

[23] Глаголев К.В., Морозов А.Н., Поздышев М.Л. Расчет возрастания энтропии при теплообмене двух тел. *Наука и образование: научное издание*, 2014, № 1. DOI: 10.7463/0114.0681975

Морозов Андрей Николаевич — член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Морозов А.Н. Кинетическое описание неравновесных процессов переноса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 60–72. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-60-72

KINETIC DESCRIPTION OF NONEQUILIBRIUM TRANSFER PROCESSES

A.N. Morozov amor@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper uses the example of the Brownian motion to kinetically describe the process of entropy increment in a nonequilibrium medium. The study shows that depending on the degree of nonequilibrium, the convergence to an equilibrium state occurs according to different laws. In the case of a strongly nonequilibrium medium, the entropy increment is described mathematically by the weakest logarithmic law, and in the case of a close-to-equilibrium medium, the entropy seeks a maximum value according to the strongest mathematical law — the exponential law. The obtained expressions describing the Brownian motion can be extended to all other nonequilibrium processes. Mathematical modeling made it possible to calculate the process of entropy increment for an arbitrary degree of nonequilibrium and establish the parameters at which the transition from logarithmic to exponential law of entropy increment occurs when the thermodynamic system seeks an equilibrium state

Keywords

Thermodynamic equilibrium, nonequilibrium state, local equilibrium hypothesis, entropy production, Brownian motion

Received 06.11.2020
Accepted 07.12.2020

REFERENCES

[1] Morozov A.N., Skripkin A.V. Nemarkovskie fizicheskie protsessy [Non-Markovian physical processes]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2018.

[2] Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability, and fluctuations. Wiley, 1971.

[3] Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2001. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-56565-6

[4] Morozov A.N. Description of transfer processes in a locally nonequilibrium medium. *Entropy*, 2019, vol. 21, iss. 1, art. 9. DOI: https://doi.org/10.3390/e21010009

[5] Bunkin N.F., Morozov A.N. Stokhasticheskie sistemy v fizike i tekhnike [Stochastic processes in physics and technics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011.

[6] Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Phys.-Usp.*, 1997, vol. 40, no. 10, pp. 1043–1053. DOI: https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292

[7] Mainardi F., Mura A., Tampieri F. Brownian motion and anomalous diffusion revisited via a fractional Langevin equation. *Modern Problems of Statistical Physics*, 2009, vol. 8, pp. 3–23.

[8] Lenzi E.K., Evangelista L.R., Lenzi M.K., et al. Solutions for a non-Markovian diffusion equation. *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, iss. 41, pp. 4193–4198.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.08.049

[9] Mura A., Taqqu M.S., Mainardi F. Non-Markovian diffusion equations and processes: analysis and simulations. *Physica A*, 2008, vol. 387, iss. 21, pp. 5033–5064.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.04.035

[10] Li J.-G., Zu J., Shao B. Factorization law for entanglement evolution of two qubits in non-Markovian pure dephasing channels. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 24, pp. 2300–2304. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.04.053

[11] Iwamatsu A., Ogawa Y., Mitsumori Y., et al. Non-Markovian dephasing of excitons in GaAs quantum wells. *J. Lumin.*, 2006, vol. 119-120, pp. 487–491.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2006.01.040

[12] Xia H. Non-Markovian velocity diffusion in plasma turbulence. *Dissertation Abstracts International*, 1994, vol. 54, p. 2029.

[13] Morozov A.N. Brownian motion as an irreversible non-Markovian process. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 2 (83), pp. 94–103 (in Russ.). DOI: http://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-94-103

[14] Kuzovlev Yu.E. Why nature needs 1/f noise? *Phys.-Usp.*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 719–729. DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.0185.201507d.0773

[15] Morozov A.N. Flicker noise in a locally nonequilibrium medium. *JETP Lett.*, 2018, vol. 107, no. 12, pp. 798–799. DOI: https://doi.org/10.1134/S002136401812010X

[16] Coscia V., Fermo L., Bellomo N. On the mathematical theory of living systems II: the interplay between mathematics and system biology. *Comput. Math. Appl.*, 2011, vol. 62, iss. 10, pp. 3902–3911. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.09.04

[17] Aristov V.V., Ilyin O. Kinetic models for historical processes of fast invasion and aggression. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, iss. 4, art. 04286.
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.042806

[18] Aristov V.V. Biological systems as nonequilibrium structures described by kinetic methods. *Results Phys*., 2019, vol. 13, art. 102232.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102232

[19] Bazarov I.P. Termodinamika [Thermodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991.

[20] Morozov A.N. Nonequilibrium fluctuations of a brownian particle in a medium with production of entropy. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 1 (94), pp. 47–56 (in Russ.).
DOI: http://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-47-56

[21] Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover, 2005.

[22] Janke E., Emde F., Losch F. Tafeln hoherer funktionen. Verlagsgesellschaft, 1960.

[23] Glagolev K.V., Morozov A.N., Pozdyshev M.L. Calculation of entropy increment during the heat exchange between two solid bodies. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2014, no. 1 (in Russ.).
DOI: 10.7463/0114.0681975

Morozov A.N. — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Morozov A.N. Kinetic description of nonequilibrium transfer processes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 60–72 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-60-72